令和6年度 微分方程式II 小テスト対策プリント No.1

______ 課程 ______ 年生　学籍番号 ______ 名前 ______

$\boxed{1}$ $t \in \mathbb{R}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ とする．次の行列 D に対して D^2, D^3, D^n を計算することで e^{tD} が

$$D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}, \quad e^{tD} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{t\mu} \end{pmatrix}$$

であることを e^{tD} の定義から計算せよ．

$\boxed{2}$ $a \in \mathbb{R}$, $f(t)$ を与えられた関数とする．次の微分方程式を手順に従って解け．

$$\begin{cases} x'(t) = ax(t) + f(t), \quad (t > 0) & (1) \\ x(0) = x_0 \quad (t = 0) & (2) \end{cases}$$

(i) 補助的に $x'(t) = ax(t)$ を解くと，一般解は $x(t) = Ce^{at}$ となる．定数 C を t の関数 $C(t)$ と見なし，

$$x(t) = C(t)e^{at}$$

の両辺を t について微分することで, (1) **を満たすためには**

$$C'(t) = e^{-at}f(t)$$

を満たせば良いことを確かめよ．

(ii) (1)–(2) の特解は

$$x(t) = e^{at}x_0 + \int_0^t e^{a(t-s)}f(s)ds$$

で求められることを示せ．

$\boxed{3}$ 微分方程式

$$\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$$

の一般解をそれぞれ以下の A に対して求めよ.

(1)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

(2)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

令和5年度 微分方程式II 小テスト対策プリント No.2

＿＿＿＿＿ 課程 ＿＿＿＿＿ 年生　学籍番号 ＿＿＿＿＿ 名前 ＿＿＿＿＿＿＿＿

(3)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$\boxed{4}$ 以下の微分方程式

$$\begin{cases} x' = 2y \\ y' = x - y \end{cases}$$

を考える．この微分方程式のベクトル場をかけ．ただし, x 軸 y 軸上以外で各象限に少なくとも 1 つずつベクトルをかくこと (つまりベクトルは少なくとも 4 本くこと)．また, その上から解曲線をかけ．

$\boxed{\text{5A}}$か$\boxed{\text{5B}}$のどちらかを選んで**その番号を丸で囲み**証明せよ. ただし, いずれの場合にも以下の結果を用いてもよい.

> A, B を d 次正方行列とする. $AB = BA$ ならば $e^A e^B = e^{A+B} = e^B e^A$.

$\boxed{\text{5A}}$ B が逆行列をもつとき, $Be^A B^{-1} = e^{BAB^{-1}}$.

$\boxed{\text{5B}}$ e^A は逆行列をもち, $(e^A)^{-1} = e^{-A}$.