微分方程式II・自習シート

問 1

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

とし, $A\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}$ なる連立方程式を考える. $\lambda = 2$ について

$$A\boldsymbol{x} = 2\boldsymbol{x}$$

は次の連立方程式を意味する:

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 = 2x_1, \\ 2x_1 + x_2 = 2x_2. \end{cases}$$

そこから $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ が得られるので, $\boldsymbol{x} = {}^{\mathsf{T}}(0, 0)$ となる. $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ は固有ベクトルとは言わないので, $\lambda = 2$ は A の固有値ではない [1].

次の問いに答えよ.

(1) $\lambda = 1$, $\lambda = 5$, $\lambda = 0$ はそれぞれ A の固有値か否か調べよ.

(2) (1) から得られた固有値 λ に対する固有ベクトルをすべて求めよ.

(3) $(A - 1I)^{-1}$, $(A - 5I)^{-1}$, $(A - 0I)^{-1}$ が存在するか否か調べよ.

問 2　n 次正方行列 A に対して λ が A の固有値になるための必要十分条件は $A - \lambda I$ が正則ではない, つまり逆行列を持たないことである. 例題を参考に次の行列の固有値と対応する固有ベクトルをそれぞれ求めよ.

例題

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$A - \lambda I$ について

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - \lambda & 4 \\ 2 & 1 - \lambda \end{pmatrix}$$

が逆行列を持たないための必要十分条件は行列式 $\det(A - \lambda I) = 0$ なので

$$(3 - \lambda)(1 - \lambda) - 8 = 0.$$

提出する場合は, 解答例を参考にして自分で採点をしておくこと. 提出しなくても試験で 60 点以上取れば合格です.

[1] 固有値とは $A\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}$ に $\boldsymbol{0}$ 以外の解 $\boldsymbol{x}$ が存在するような λ のこと.

これを解いて

$$
\begin{gathered}
(\lambda-3)(\lambda-1)-8=0, \\
\lambda^2-4\lambda+3-8=0, \\
\lambda^2-4\lambda-5=0, \\
(\lambda-5)(\lambda+1)=0, \\
\lambda=5,-1.
\end{gathered}
$$

以上より A の固有値は $\lambda=5$ と $\lambda=-1$. $\lambda=5$ のとき,

$$
A-5I=\begin{pmatrix} 3-5 & 4 \\ 2 & 1-5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}.
$$

よって

$$
(A-5I)\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

を満たす $\boldsymbol{x}$ は

$$
2x_1-4x_2=0
$$

すなわち, $\lambda=5$ に対応する固有ベクトルは

$$
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (t\in\mathbb{R}\setminus\{0\})
$$

である. $\lambda=-1$ のとき,

$$
A-(-1)I=\begin{pmatrix} 3-(-1) & 4 \\ 2 & 1-(-1) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.
$$

よって

$$
(A-(-1)I)\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

を満たす $\boldsymbol{x}$ は

$$
4x_1+4x_2=0
$$

すなわち, $\lambda=-1$ に対応する固有ベクトルは

$$
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (t\in\mathbb{R}\setminus\{0\})
$$

である.

(1)

$$
A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}
$$

(2)

$$
A=\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}
$$

(3)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(4)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

問 3

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

とする.

(1) A の固有値と固有ベクトルを求め, さらに e^{tA} を求めよ. [2)]

(2) (1) を用いて次の連立微分方程式

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -2x + 3y \end{cases}$$

を初期条件 $(x(0), y(0)) = (1, 0)$ とともに解け.

---

2) $e^{BAB^{-1}} = Be^{A}B^{-1}$ が成立することに注意せよ.