

微分方程式 II・自習シート

問 1

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

について

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I,$$

$$A^3 = A^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I,$$

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$

よって

$$\begin{aligned} e^{tA} &= I + tA + \frac{1}{2!}(tA)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}(tA)^n + \cdots \\ &= I + tI + \frac{1}{2!}t^2I + \cdots + \frac{1}{n!}t^nI + \cdots \\ &= \begin{pmatrix} 1 + t + \frac{1}{2!}t^2 + \cdots + \frac{1}{n!}t^n + \cdots & 0 \\ 0 & 1 + t + \frac{1}{2!}t^2 + \cdots + \frac{1}{n!}t^n + \cdots \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

が求められる。同様に

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

について B^n , C^n を計算し e^{tB} と e^{tC} をそれぞれ求めよ。

問 2

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

について、固有値と固有ベクトルを求め、対角化を行うことで A^n を求めよ。