

微分方程式 II ・ 自習シート

問1 $x := x(t), y := y(t)$ とする. 次の連立微分方程式の一般解を次の手順に従って求めよ.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2x + 2y \\ \frac{dy}{dt} = -x - 5y \end{cases}$$

簡単のため $dx/dt = x', dy/dt = y'$ のように表記する.

(1) 2つめの式 $x = -y' - 5y$ とそれを微分した式

$$x' = -y'' - 5y'$$

を用意する. これらを1つめの式に代入することで y だけの微分方程式

$$y'' + 7y' + 12y = 0$$

が得られることを確かめよ.

(2) (1) で得られた微分方程式を解いて一般解 y を求めよ.

(3) (2) で得られた y を用いて x を求めよ.

問2 $t \in \mathbb{R}, A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ とし,

$$e^{tA}$$

を考える. 次の問いに答えよ.

(1) $h \in \mathbb{R}; h \neq 0$ とする. e^{hA} の第 N 項 ($(hA)^N$ の項) までの和を求めよ.

(2) $h \in \mathbb{R}; h \neq 0$ とする.

$$\left\| \frac{e^{(t+h)A} - e^{tA}}{h} - Ae^{tA} \right\| \leq \left\| \frac{1}{h} (e^{hA} - I) - A \right\| \|e^{tA}\|$$

を証明せよ.

(3) $h \rightarrow 0$ とすると

$$\left\| \frac{1}{h} (e^{hA} - I) - A \right\| \rightarrow 0$$

であることを, (1) の結果と三角不等式を用いて証明せよ. ただし,

$$\left\| e^{hA} - \left(I + (hA) + \frac{1}{2!}(hA)^2 + \cdots + \frac{1}{N!}(hA)^N \right) \right\| \leq o(h^N)$$

を用いてもよい.