2024/10/18/No.5

微分方程式II・自習シート

問 1　$A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, すなわち n 次正方行列とする．以下を手順に従って証明せよ [1]．

> e^A の逆行列 $(e^A)^{-1}$ は e^{-A} と等しい．

(1) 講義で証明した「$AB = BA$ ならば $e^A e^B = e^B e^A = e^{A+B}$」を用いて,

$$e^A e^{-A} = e^{-A} e^A = I$$

を証明せよ．

(2) 線形代数のテキストを調べて A の逆行列 A^{-1} の**定義**をかけ．

(3) $(e^A)^{-1} = e^{-A}$ を証明せよ．

問 2　$A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, すなわち n 次正方行列とする．以下を手順に従って証明せよ．

> B が逆行列を持つならば
> $$Be^A B^{-1} = e^{BAB^{-1}}$$

(1) $(BAB^{-1})^2$ は指数を積でかくと

$$\begin{aligned}(BAB^{-1})^2 &= (BAB^{-1})(BAB^{-1})\\ &= BAB^{-1}BAB^{-1}\\ &= BAIAB^{-1}\\ &= BAAB^{-1}\\ &= BA^2B^{-1}\end{aligned}$$

と計算できる (ここで $B^{-1}B = I$ を用いた)．$(BAB^{-1})^3$ や $(BAB^{-1})^n$ をそれぞれ求めよ．

(2) $e^{BAB^{-1}}$ の級数による定義をかけ, また, その第 N 項までの和 S_N をかけ．

提出する場合は, 解答例を参考にして自分で採点をしておくこと．提出しなくても試験で 60 点以上取れば合格です．

[1] ただし, A を例えば

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

とすると $-A$ とは $(-1)A$, つまり次の行列を意味する:

$$-A = \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & \cdots & \cdots & -a_{nn} \end{pmatrix}$$

(3)
$$\|Be^AB^{-1} - S_N\| \le \|B\| \left\| e^A - \left(I + A + \frac{1}{2!}A^2 + \cdots + \frac{1}{N!}A^N \right) \right\| \|B^{-1}\|$$
を示せ.

(4) 三角不等式
$$\|Be^AB^{-1} - e^{BAB^{-1}}\| \le \|Be^AB^{-1} - S_N\| + \|S_N - e^{BAB^{-1}}\|$$
を用いて, $Be^AB^{-1} = e^{BAB^{-1}}$ を証明せよ.

問 3　次の微分方程式を考える. $x = x(t)$ とし
$$x'' + 2x' + 5x = 0 \tag{1}$$
新しく未知関数 x_1 を x の 1 階微分 x' とおく, つまり $x_1 = x'$ とおく. このとき, この微分方程式から
$$x'' + 2x' + 5x = x_1' + 2x_1 + 5x = 0$$
が得られるので (2) は
$$\begin{cases} x' = x_1 \\ x_1' + 2x_1 + 5x \quad = 0 \end{cases}$$
と同値である. **つまり次の定数係数斉次 (同次) 線形微分方程式**
$$x'' + a_1x' + a_2x = 0$$
や
$$x^{(n)} + a_1x^{(n-1)} + a_2x^{(n-2)} + \cdots a_{n-1}x' + a_nx = 0$$
は**必ず 1 階の連立微分方程式に書き換えられる**. 次の微分方程式を 1 階の連立微分方程式にそれぞれ書き換えよ.

(1) $x'' + 8x' + 16x = 0$

(2) $x''' + 6x'' + 12x' + 8x = 0$

(3) $x''' - 3x'' + 4x = 0$

(4) $x^{(4)} - 3x''' + 3x'' - x' = 0$

問 4　次の微分方程式を考える. $x = x(t)$ とし
$$x'' + 2x' + 5x = 0 \tag{2}$$
問 3 より (2) は
$$\begin{cases} x' &= \qquad x_1 \\ x_1' &= -5x - 2x_1 \end{cases}$$
と同値である. そこでベクトル $\boldsymbol{x}$ を
$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ x_1 \end{pmatrix}$$

と定義すれば[2],

$$\boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} x' \\ x_1' \end{pmatrix}$$

でさらに連立微分方程式は行列を用いて

$$\begin{pmatrix} x' \\ x_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ -5x - 2x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x_1 \end{pmatrix}$$

結局, 微分方程式 (2) は

$$\begin{pmatrix} x' \\ x_1' \end{pmatrix} = \boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x_1 \end{pmatrix}$$

のように $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$ と同値である. **つまり次の定数係数斉次 (同次) 線形微分方程式**

$$x'' + a_1 x' + a_2 x = 0$$

や

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + a_2 x^{(n-2)} + \cdots a_{n-1} x' + a_n x = 0$$

は, **行列 A を用いて必ず $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$ に書き換えられる**. 次の微分方程式を $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$ に書き換えるための行列 A をそれぞれ求めよ.

(1) $x'' + 8x' + 16x = 0$

(2) $x''' + 6x'' + 12x' + 8x = 0$

(3) $x''' - 3x'' + 4x = 0$

(4) $x^{(4)} - 3x''' + 3x'' - x' = 0$

---

[2] x を x_0 だと思えば第 0 成分, 第 1 成分と縦に並べたベクトルと見なせる