2024/10/04/No.4

微分方程式II・自習シート

問 1　θ を実数とする．複素数 $i\theta$ について, 講義で証明した**オイラーの公式**

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

を用いて数学に登場する重要な値「0,1,π,e,i」を結びつける次の等式

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

を証明せよ.

問 2　A, B を 2 次正方行列とする．すなわち

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

とする．フロベニウスノルム

$$\begin{aligned} \|A\| &:= \sqrt{\sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}^2} \qquad \left(\text{つまり} = \sqrt{\sum_{i=1}^{2}\left(\sum_{j=1}^{2} a_{ij}^2\right)}\ \right) \\ &= \sqrt{a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{21}^2 + a_{22}^2} \quad (i, j = 1 \text{ から } i, j = 2 \text{ までのすべての和}) \end{aligned}$$

に対して

$$\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$$

が成立することを証明せよ．ただし, つぎのシュワルツの不等式を用いてもよい.

$$ab \leq \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2 \qquad (\text{全部ばらすならば})$$

$$\left(\sum_{k=1}^{2} c_k d_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{2} c_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{2} d_k^2\right) \qquad (\text{和の形を残しながらならば})$$

提出する場合は, 解答例を参考にして自分で採点をしておくこと．提出しなくても試験で 60 点以上取れば合格です.