微分方程式II・自習シート

問 1　次の $f(x)$, $g(x)$ の $x=0$ における n 次近似式を，ランダウの記号 o を用いて等式で求めよ．

(1) $f(x) = \log(1+x)$

(2) $g(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2}$

問 2　A を $n \times n$ 行列とする．以後，行列を

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

とかくことにする．「実数の大きさの数値化」である絶対値のように，「行列 A の大きさ」の数値化として**ノルム**[1]を

$$\|A\| := \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2} \qquad \left(つまり = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2 \right)} \quad \right)$$
$$= \sqrt{a_{11}^2 + a_{12}^2 + \cdots + a_{1n}^2 + a_{21}^2 + \cdots + a_{nn}^2} \quad (i, j = 1 \text{ から } i, j = n \text{ までのすべての和})$$

を定義する (A のフロベニウスノルムと呼ぶことがある)．このとき，次の行列 A, B, I に対して $\|A\|$, $\|B\|$, $\|I\|$ の値をそれぞれ求めよ．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 10 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

提出する場合は，解答例を参考にして自分で採点をしておくこと．提出しなくても試験で 60 点以上取れば合格です．

[1] 行列式 $|A|$ とは異なることに注意．実際，行列 A

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

の行列式

$$|A| = |ad - bd|$$

は行列の大きさの数値化としては不適切である．例えば

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

の行列式 $|C|$ は 0 であるが，C 自身は成分がすべて 0 の行列ではなく，実数 r に対して $|r| = 0$ ならばまたそのときに限り $r = 0$ であるという「大きさの数値化」の前提 (ノルムの定義) を満たしていない．行列式はその行列が作る変換の面積倍率を意味している．