2024/09/19/No.2

微分方程式II・自習シート

問 1 I を区間とし, $f \in C^2(I)$ とする [1]

$$f(a+h) \fallingdotseq f(a) + f'(a)h + \frac{1}{2}f''(a)h^2,$$

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{1}{2}f''(a)h^2 + \varepsilon_2(h), \quad \text{ただし}, \lim_{h\to 0}\frac{\varepsilon_2(h)}{h^2} = 0,$$

$$f(x) \fallingdotseq f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2, \tag{1}$$

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 + \varepsilon_2(x), \quad \text{ただし}, \lim_{x\to a}\frac{\varepsilon_2(x)}{(x-a)^2} = 0,$$

が成立する (講義で証明済み). (1) の右辺の式

$$f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2$$

を $f(x)$ の $x=a$ における 2 次近似式と呼ぶ. 次の関数 $f(x)$ の括弧内の点における 2 次近似式を求めよ.

(1) $f(x) = e^x \quad (x=0)$

(2) $f(x) = \sin x \quad (x=0)$

(3) $f(x) = \sqrt{x} \quad (x=1)$

問 2[線形代数の復習] 実数 $\mathbb{R}$ には絶対値 $|\cdot|$ が定義されている. 絶対値は次の 3 条件を満たす: どのような $x, y \in \mathbb{R}$ に対しても

(i) 常に $|x| \geq 0$ である. 特に「$|x| = 0 \iff x = 0$」;

(ii) x の定数倍 rx について, $|rx| = |r||x|$ がどのような $r \in \mathbb{R}$ に対しても成立する;

(iii) $|x+y| \leq |x| + |y|$ が成立する.

これを一般化して**ノルム**とよばれる大きさを測る関数 $\|\cdot\|$ を定義する. すなわちある集合 V に対して [2]次の 3 条件を満たすとき $\|\cdot\|$ を V のノルムという: どのような $x, y \in V$ に対しても

(i) 常に $\|x\| \geq 0$ である. 特に「$\|x\| = 0 \iff x$ は V の空間における 0」;

(ii) x の定数倍 rx について, $\|rx\| = |r|\|x\|$ がどのような $r \in \mathbb{R}$ に対しても成立する;

(iii) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ が成立する.

提出する場合は, 解答例を参考にして自分で採点をしておくこと. 提出しなくても試験で 60 点以上取れば合格です.

[1] $C^2(I) := \{f : I \to \mathbb{R} \mid f$ は微分可能で, その導関数も微分可能で f, f', f'' は連続 $\}$

[2] V には和と定数倍が定義されていてとある性質を満たしていることを要請するがここではそれについては述べない. すなわち, 厳密には「V は線形空間とする」と言っておく必要がある.

(例題) の解答を参考に, 次の (問い) に答えよ. ただし三角不等式の証明にはシュワルツの不等式[3)]を用いてよい.

(例題) $V := \mathbb{C}$ とする. $\alpha \in V$ に対して, $\alpha := a + bi$ とおき

$$\|\alpha\| := \sqrt{a^2 + b^2}$$

で定義すると $\|\cdot\|$ は V のノルムになることを証明せよ.

(問い) $V := \mathbb{R}^{n\times n}$, つまり n 次正方行列とする. $A \in V$ に対して,

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

とおき

$$\|A\| := \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2}$$

で定義すると $\|\cdot\|$ は V のノルムになることを証明せよ.

例題の解答　(1) ノルムの 3 条件を満たすことを示す. $\alpha, \beta \in V$ とし,

$$\alpha := a + bi, \quad \beta := c + di$$

とおく.
(i) $\|\alpha\| = \sqrt{a^2+b^2} \geq 0$. 特に, $\|\alpha\| = 0$ のとき,

$$0 = \sqrt{a^2+b^2} \geq \sqrt{a^2} = |a|$$

より $a = 0$. 同様に

$$0 = \sqrt{a^2+b^2} \geq \sqrt{b^2} = |b|$$

より $b = 0$. つまり $\alpha = 0{+}0i = 0$. 逆に $\alpha = 0$ ならば $a = b = 0$. よって $\|\alpha\| = \sqrt{0^2+0^2} = 0$ より, ノルムの条件 (i) を満たす.
　次に $r \in \mathbb{R}$ とする. $r\alpha = (ra) + (rb)i$ に注意して

$$\begin{aligned} \|r\alpha\| &= \sqrt{(ra)^2 + (rb)^2} \\ &= |r|\sqrt{a^2+b^2} \\ &= |r|\|\alpha\|. \end{aligned}$$

よって, ノルムの条件 (ii) を満たす.
　最後に $\alpha + \beta = (a+c) + (b+d)i$ に注意して, シュワルツの不等式を用いると

$$\begin{aligned} \|\alpha+\beta\|^2 &= (a+c)^2 + (b+d)^2 \\ &= a^2 + 2ac + c^2 + b^2 + 2bd + d^2 \\ &\leq (a^2+c^2) + 2\sqrt{a^2+c^2}\sqrt{b^2+d^2} + (b^2+d^2) \\ &= (\|\alpha\| + \|\beta\|)^2. \end{aligned}$$

3)

$$ac + bd \leq \sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}, \quad \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}b_{ij} \leq \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2}\sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}^2}$$

よって, $\|\alpha + \beta\| \leq \|\alpha\| + \|\beta\|$ が得られ, ノルムの条件 (iii) を満たす.

以上より, $\|\cdot\|$ は V のノルムである. $\square$