微分方程式II・自習シート

問　次の行列 A の固有値と固有ベクトルを考える.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

固有方程式は

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} &= (1-\lambda)^2 + 4 \\ &= \lambda^2 - 2\lambda + 1 + 4 \\ &= \lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0 \end{aligned}$$

より, 実数解を持たず固有値は $\lambda = 1 + 2i, 1 - 2i$ のように複素数になる [1]. 実数の固有値を持つ場合と同様に固有ベクトルを求めると $\lambda = 1 + 2i$ のとき固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} -2i & 2 \\ -2 & -2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

より $-2iv_1 + 2v_2 = 0$ から (下の $-2v_1 - 2iv_2 = 0$ を使っても同じ結果は得られる)

$$\boldsymbol{v} = t \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix} \quad ({}^\forall t \in \mathbb{C}; t \neq 0)$$

が対応する固有ベクトルとなる (ただし, t を複素数から選ぶ). $\lambda = 1 - 2i$ のとき固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} 2i & 2 \\ -2 & 2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

より $2iv_1 + 2v_2 = 0$ から

$$\boldsymbol{v} = t \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - t \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix} \quad ({}^\forall t \in \mathbb{C}; t \neq 0)$$

が対応する固有ベクトルとなる. ここで, $\lambda = 1 \pm 2i$ に対応する固有ベクトルは

$$\boldsymbol{v} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \pm t \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix}$$

のように共役な関係にある.

　次の行列の固有値と固有ベクトルをそれぞれ求めよ.

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$$

　提出する場合は, 解答例を参考にして自分で採点をしておくこと. 提出しなくても試験で 60 点以上取れば合格です.

[1] $(1+2i) + (1-2i) = \mathrm{tr}A = 1 + 1$ より確かに正しそう.