2024/11/11/No.9

微分方程式II・自習シート

問 1　$x = x(t)$, $y = y(t)$ とする. 次の微分方程式系 (連立微分方程式) の一般解を, e^{tA} を用いる方法で求めよ.

$$\begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = -x - 2y \end{cases}$$

解答例　$\boldsymbol{x} := {}^{\mathsf{T}}(x, y)$, および

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

とおくとこの微分方程式系は

$$\boldsymbol{x}'(t) = A\boldsymbol{x}(t)$$

とかける.

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ -1 & -2-\lambda \end{vmatrix} &= (1-\lambda)(-2-\lambda) + 2 \\ &= (\lambda - 1)(\lambda + 2) + 2 \\ &= \lambda^2 + \lambda - 2 + 2 \\ &= \lambda(\lambda + 1) = 0 \end{aligned}$$

より, 固有値は $\lambda = 0, -1$ [1]. $\lambda = 0$ のとき固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

より $v_1 + 2v_2 = 0$ から

$$\boldsymbol{v} = t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ({}^{\forall} t \in \mathbb{R}; t \neq 0)$$

が対応する固有ベクトルとなる. $\lambda = -1$ のとき固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

より $v_1 + v_2 = 0$ から

$$\boldsymbol{v} = t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad ({}^{\forall} t \in \mathbb{R}; t \neq 0)$$

が対応する固有ベクトルとなる. 以上より例えば

$$P = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

提出する場合は, 解答例を参考にして自分で採点をしておくこと. 提出しなくても試験で 60 点以上取れば合格です.

[1] $0 - 1 = \mathrm{tr} A = 1 - 2$ より確かに正しそう.

によって

$$A = P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1}$$

と変形できる．よって

$$e^{tA} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} P^{-1}$$

でさらに, 微分方程式系の特解は, 初期条件 $\boldsymbol{x}_0$ を用いて

$$\boldsymbol{x}(t) = e^{tPAP^{-1}}\boldsymbol{x}_0 = Pe^{tA}P^{-1}\boldsymbol{x}_0$$

となるので, あらためて

$${}^{\mathsf{T}}(C_1, C_2) := P^{-1}\boldsymbol{x}_0$$

とおけば, 微分方程式系の一般解は

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} &= Pe^{tA} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 e^{-t} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -2C_1 + C_2 e^{-t} \\ C_2 - C_2 e^{-t} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

となる. □

問 2　[定数変化法] 次の微分方程式を手順に従って解け.

$$x'(t) = \frac{1}{t}x(t) + \log t \tag{1}$$

(i) 補助的に

$$x'(t) = \frac{1}{t}x(t)$$

を解き, 一般解が $x(t) = Ct$ となることを確かめよ.

解答例　$x \neq 0$ ならば

$$\begin{gathered}
\frac{1}{x}\frac{dx}{dt} = \frac{1}{t}, \\
\int \frac{1}{x}\frac{dx}{dt}dt = \int \frac{1}{t}dt, \\
\log|x| = \log|t| + C_1, \\
\log|x| - \log|t| = C_1, \\
\log\left|\frac{x}{t}\right| = C_1, \\
\left|\frac{x}{t}\right| = e^{C_1}, \\
\frac{x}{t} = \pm e^{C_1} =: C, \\
x = Ct.
\end{gathered}$$

$x = 0$ も解だが, 上の形で $C = 0$ とすれば表現できる．よって一般解は

$$x = x(t) = Ct.$$

(ii) (i) で得られた一般解 $x(t) = Ct$ の定数 C を t の関数 $C(t)$ と見なし,

$$x(t) = C(t)t$$

の両辺を t について微分することで, **(1) を満たすためには**

$$C'(t) = \frac{\log t}{t} \tag{2}$$

を満たせば良いことを確かめよ.

解答例

$$x(t) = C(t)t$$

の両辺を t について微分すると

$$x'(t) = C'(t)t + C(t)$$

なのでこれと x を (1) に代入して (1) を C の微分方程式に変形すれば

$$\begin{gathered}
C'(t)t + C(t) = \frac{1}{t}C(t)t + \log t, \\
C'(t) = \frac{\log t}{t}.
\end{gathered}$$

(iii) (ii) で得られた $C(t)$ の微分方程式 (2) をとき, (1) の一般解を求めよ.

解答例

$$C'(t) = \frac{\log t}{t}$$

を解くと,

$$\frac{dC}{dt} = \frac{\log t}{t},$$
$$\int \frac{dC}{dt}dt = \int \frac{\log t}{t},$$
$$\int dC = \int \log t \frac{1}{t} dt.$$

ここで, 右辺については $g = \log t$ とおくと $dg = (1/t)dt$ で (置換積分)

$$C = \int g dg = \frac{1}{2}g^2 + C_0,$$
$$C = \frac{1}{2}(\log t)^2 + C_0.$$

よって

$$x(t) = \left(\frac{1}{2}(\log t)^2 + C_0\right) t$$

が元の方程式の一般解となる. □

問 3 [定数変化法] $a \in \mathbb{R}$, $f(t)$ を与えられた関数とする. 次の微分方程式を手順に従って解け.

$$x'(t) = ax(t) + f(t) \tag{3}$$

(i) 補助的に

$$x'(t) = ax(t)$$

を解き, 一般解が $x(t) = Ce^{at}$ となることを確かめよ.

解答例 $x \neq 0$ ならば

$$\frac{1}{x}\frac{dx}{dt} = a,$$
$$\int \frac{1}{x}\frac{dx}{dt}dt = \int a dt,$$
$$\log|x| = at + C_1,$$
$$|x| = e^{at+C_1} = e^{at}e^{C_1},$$
$$x = \pm e^{C_1}e^{at},$$
$$x = Ce^{at}.$$

$x = 0$ も解だが, 上の形で $C = 0$ とすれば表現できる. よって一般解は

$$x = x(t) = Ce^{at}.$$

(ii) (i) で得られた一般解 $x(t) = Ce^{at}$ の定数 C を t の関数 $C(t)$ と見なし,

$$x(t) = C(t)e^{at}$$

の両辺を t について微分することで, **(3) を満たすためには**

$$C'(t) = e^{-at}f(t) \tag{4}$$

を満たせば良いことを確かめよ.

解答例

$$x(t) = C(t)e^{at}$$

の両辺を t について微分すると

$$x'(t) = C'(t)e^{at} + C(t)ae^{at}$$

なのでこれと x を (4) に代入して (3) を C の微分方程式に変形すれば

$$\begin{gathered} C'(t)e^{at} + C(t)ae^{at} = aC(t)e^{at} + f(t), \\ C'(t) = e^{-at}f(t). \end{gathered}$$

(iii) (ii) で得られた $C(t)$ の微分方程式 (4) の両辺を $[0,t]$ で積分することで, (3) の一般解が

$$x(t) = C_0e^{at} + \int_0^t e^{a(t-s)}f(s)ds$$

であることを示せ (ただし $C(0) = C_0$).

解答例

$$C'(t) = e^{-at}f(t)$$

の両辺を $[0,t]$ で積分すると (積分する前に $C'(s) = e^{-as}f(s)$ と文字を変えておく)

$$\begin{gathered} \int_0^t C'(s)ds = \int_0^t e^{-as}f(s)ds, \\ C(t) - C(0) = \int_0^t e^{-as}f(s)ds, \\ C(t) = C_0 + \int_0^t e^{-as}f(s)ds. \end{gathered}$$

よって

$$\begin{aligned} x(t) &= \left(C_0 + \int_0^t e^{-as}f(s)ds\right)e^{at} \\ &= C_0e^{at} + \int_0^t e^{a(t-s)}f(s)ds \end{aligned}$$

が元の方程式の一般解となる. □

(iv)

$$\begin{cases} x'(t) = ax(t) + f(t), & (t > 0) \\ x(0) = x_0 & (t = 0) \end{cases}$$

の特解は

$$x(t) = e^{at}x_0 + \int_0^t e^{a(t-s)}f(s)ds$$

で求められることを示せ.

解答例　(iii) より一般解は

$$x(t) = C_0 e^{at} + \int_0^t e^{a(t-s)} f(s) ds$$

なので, 後は C_0 を求めればよい. $t = 0$ を代入すると

$$\begin{aligned} x(0) &= C_0 e^{a0} + \int_0^0 e^{a(0-s)} f(s) ds \\ &= C_0 + 0. \end{aligned}$$

よって, 初期条件 $x(0) = x_0$ より $C_0 = x_0$ が得られるので特解は

$$x(t) = e^{at} x_0 + \int_0^t e^{a(t-s)} f(s) ds$$

で求められる. □