微分方程式II・自習シート

問 1

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

とし, $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ なる連立方程式を考える. $\lambda = 2$ について

$$A\boldsymbol{x} = 2\boldsymbol{x}$$

は次の連立方程式を意味する:

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 = 2x_1, \\ 2x_1 + x_2 = 2x_2. \end{cases}$$

そこから $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ が得られるので, $\boldsymbol{x} = {}^{\mathsf{T}}(0, 0)$ となる. $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ は固有ベクトルとは言わないので, $\lambda = 2$ は A の固有値ではない [1].

次の問いに答えよ.

(1) $\lambda = 1$, $\lambda = 5$, $\lambda = 0$ はそれぞれ A の固有値か否か調べよ.

解答例 $\lambda = 1$ のとき,

$$A\boldsymbol{x} = 1\boldsymbol{x},$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 = x_1, \\ 2x_1 + x_2 = x_2 \end{cases}$$

から $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ が得られるので, $\lambda = 1$ は A の固有値ではない.

提出する場合は, 解答例を参考にして自分で採点をしておくこと. 提出しなくても試験で 60 点以上取れば合格です.

[1] 固有値とは $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ に $\boldsymbol{0}$ 以外の解 $\boldsymbol{x}$ が存在するような λ のこと.

$\lambda = 5$ のとき,

$$
\begin{gathered}
A\boldsymbol{x} = 5\boldsymbol{x}, \\
\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \\
\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 = 5x_1, \\ 2x_1 + x_2 = 5x_2 \end{cases} \\
\begin{cases} -2x_1 + 4x_2 = 0, \\ 2x_1 - 4x_2 = 0 \end{cases}
\end{gathered}
$$

から

$$
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R})
$$

が得られるので, ${}^{\mathsf{T}}(x_1, x_2) = {}^{\mathsf{T}}(0, 0)$ 以外に解を持つ. よって $\lambda = 5$ は A の固有値である.

$\lambda = 0$ のとき,

$$
\begin{gathered}
A\boldsymbol{x} = 0\boldsymbol{x}, \\
\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\
\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 = 0, \\ 2x_1 + x_2 = 0 \end{cases}
\end{gathered}
$$

から $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ が得られるので, $\lambda = 0$ は A の固有値ではない.

(2) (1) から得られた固有値 λ に対する固有ベクトルをすべて求めよ.

解答例　(1) より $\lambda = 5$ が固有値であったがその解は

$$
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R})
$$

と表現された. ${}^{\mathsf{T}}(x_1, x_2) = {}^{\mathsf{T}}(0, 0)$ は固有ベクトルと言わないので, $\lambda = 5$ に対する固有ベクトルは $t = 0$ の場合だけを除いた

$$
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R} \setminus \{0\})
$$

である ($\mathbb{R} \setminus \{0\}$ とは実数 $\mathbb{R}$ から $\{0\}$ だけを除いた集合を意味する).

(3) $(A - 1I)^{-1}$, $(A - 5I)^{-1}$, $(A - 0I)^{-1}$ が存在するか否か調べよ.

解答例　$A - 1I$ について

$$
A - 1I = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}
$$

で, $\det A = -8$ より逆行列が存在し

$$(A - 1I)^{-1} = \frac{1}{-8}\begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

$A - 5I$ について

$$A - 5I = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - 5\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$$

で, $\det A = 0$ より逆行列は存在しない.

$A - 0I$ について

$$A - 0I = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - 0\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

で, $\det A = -5$ より逆行列が存在し

$$(A - 0I)^{-1} = \frac{1}{-5}\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

注: λ が A の固有値であることと $A - \lambda I$ が逆行列を持たないことは同値.

問 2　n 次正方行列 A に対して λ が A の固有値になるための必要十分条件は $A - \lambda I$ が正則ではない, つまり逆行列を持たないことである. 例題を参考に次の行列の固有値と対応する固有ベクトルをそれぞれ求めよ.

例題

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$A - \lambda I$ について

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-\lambda & 4 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

が逆行列を持たないための必要十分条件は行列式 $\det(A - \lambda I) = 0$ なので

$$(3-\lambda)(1-\lambda) - 8 = 0.$$

これを解いて

$$\begin{gathered}
(\lambda - 3)(\lambda - 1) - 8 = 0, \\
\lambda^2 - 4\lambda + 3 - 8 = 0, \\
\lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0, \\
(\lambda - 5)(\lambda + 1) = 0, \\
\lambda = 5, -1.
\end{gathered}$$

以上より A の固有値は $\lambda = 5$ と $\lambda = -1$. $\lambda = 5$ のとき,

$$A - 5I = \begin{pmatrix} 3-5 & 4 \\ 2 & 1-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

よって

$$(A-5I)\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を満たす $\boldsymbol{x}$ は

$$2x_1 - 4x_2 = 0$$

すなわち, $\lambda = 5$ に対応する固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$$

である. $\lambda = -1$ のとき,

$$A-(-1)I = \begin{pmatrix} 3-(-1) & 4 \\ 2 & 1-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

よって

$$(A-(-1)I)\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を満たす $\boldsymbol{x}$ は

$$4x_1 + 4x_2 = 0$$

すなわち, $\lambda = -1$ に対応する固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$$

である.

(1)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

解答例　$A - \lambda I$ について

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}$$

が逆行列を持たないための必要十分条件は行列式 $\det(A - \lambda I) = 0$ なので

$$\lambda^2 - 1 = 0.$$

以上より A の固有値は

$$\lambda = 1, -1.$$

$\lambda = 1$ のとき,

$$(A-1I)\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0-1 & 1 \\ 1 & 0-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を満たす $\boldsymbol{x}$ は

$$x_1 - x_2 = 0$$

すなわち, $\lambda = 1$ に対応する固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$$

である.

$\lambda = -1$ のとき,

$$(A - (-1)I)\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0-(-1) & 1 \\ 1 & 0-(-1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を満たす $\boldsymbol{x}$ は

$$x_1 + x_2 = 0$$

すなわち, $\lambda = -1$ に対応する固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$$

である.

(2)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

解答例　$A - \lambda I$ について

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-\lambda & 6 \\ 0 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

が逆行列を持たないための必要十分条件は行列式 $\det(A - \lambda I) = 0$ なので

$$(3-\lambda)(2-\lambda) = 0.$$

これを解いて

$$\lambda = 3, 2.$$

以上より A の固有値は $\lambda = 3$ と $\lambda = 2$.

$\lambda = 3$ のとき,

$$(A - 3I)\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 3-3 & 6 \\ 0 & 2-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を満たす $\boldsymbol{x}$ は

$$x_2 = 0 \quad (x_1\text{はどんな実数でもよい})$$

すなわち, $\lambda = 3$ に対応する固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$$

である.

$\lambda=2$ のとき,

$$(A-2I)\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}3-2 & 6\\ 0 & 2-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

を満たす $\boldsymbol{x}$ は

$$x_1+6x_2=0$$

すなわち, $\lambda=2$ に対応する固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}6\\ -1\end{pmatrix}\quad (t\in\mathbb{R}\setminus\{0\})$$

である.

(3)

$$A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 0 & 2\end{pmatrix}$$

解答例　$A-\lambda I$ について

$$A-\lambda I=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 0 & 2\end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-\lambda & 3\\ 0 & 2-\lambda\end{pmatrix}$$

が逆行列を持たないための必要十分条件は行列式 $\det(A-\lambda I)=0$ なので

$$(2-\lambda)(2-\lambda)=0.$$

これを解いて

$$\lambda=2.$$

以上より A の固有値は $\lambda=2$.

$$(A-2I)\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}2-2 & 3\\ 0 & 2-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

を満たす $\boldsymbol{x}$ は

$$x_2=0\quad (x_1\text{はどんな実数でもよい})$$

すなわち, $\lambda=3$ に対応する固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}\quad (t\in\mathbb{R}\setminus\{0\})$$

である.

(4)

$$A=\begin{pmatrix}2 & -2 & 2\\ -2 & 2 & 2\\ 2 & 2 & -2\end{pmatrix}$$

解答例　$A-\lambda I$ について

$$A-\lambda I=\begin{pmatrix}2&-2&2\\-2&2&2\\2&2&-2\end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-\lambda&-2&2\\-2&2-\lambda&2\\2&2&-2-\lambda\end{pmatrix}$$

が逆行列を持たないための必要十分条件は行列式 $\det(A-\lambda I)=0$ なので

$$\det(A-\lambda I)=(2-\lambda)\begin{vmatrix}2-\lambda&2\\2&-(2+\lambda)\end{vmatrix}-(-2)\begin{vmatrix}-2&2\\2&-(2+\lambda)\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}-2&2\\2-\lambda&2\end{vmatrix}=0.$$

これを解いて

$$\begin{gathered}(2-\lambda)\bigl\{-(2-\lambda)(2+\lambda)-4\bigr\}+2\bigl\{2(2+\lambda)-4\bigr\}+2\bigl\{-4-2(2-\lambda)\bigr\}=0,\\-(\lambda-2)^2(\lambda+2)-4(2-\lambda)+4(2+\lambda)-8-8-4(2-\lambda)=0,\\-(\lambda^2-4\lambda+4)(\lambda+2)-8+4\lambda+8+4\lambda-16-8+4\lambda=0,\\-(\lambda^3-2\lambda^2-4\lambda+8)+12\lambda-24=0,\\\lambda^2-2\lambda^2-16\lambda+32=0,\\(\lambda-2)(\lambda-4)(\lambda+4)=0,\\\lambda=2,4,-4.\end{gathered}$$

以上より A の固有値は $\lambda=2$ と $\lambda=4$ と $\lambda=-4$.

$\lambda=2$ のとき,

$$(A-2I)\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}2-2&-2&2\\-2&2-2&2\\2&2&-2-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

を満たす $\boldsymbol{x}$ は

$$\begin{cases}-2x_2+2x_3=0,\\-2x_1+2x_3=0,\\2x_1+2x_2=0\end{cases}$$

すなわち, $x_1=t$ とおけば, $x_2=-x_1=-t$, $x_3=x_1=t$ より $\lambda=2$ に対応する固有ベクトルは,

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\qquad(t\in\mathbb{R}\setminus\{0\})$$

である.

$\lambda=4$ のとき,

$$(A-4I)\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}2-4&-2&2\\-2&2-4&2\\2&2&-2-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

を満たす $\boldsymbol{x}$ は

$$\begin{cases}-2x_1-2x_2+2x_3=0,\\2x_1+2x_2-6x_3=0\end{cases}$$

すなわち, $x_3=0$ (x_1, x_2 はどんな実数でもよい. **異なる実数でもよい**). よって $\lambda=4$ に対応する固有ベクトルは,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (s,t \in \mathbb{R}\setminus\{0\})$$

である.

問 3

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

とする.

(1) A の固有値と固有ベクトルを求め, さらに e^{tA} を求めよ. [2)]

解答例

$$A-\lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -2 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

より行列式が 0 となるのは

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} &= -\lambda(3-\lambda)+2 \\ &= \lambda(\lambda-3)+2 \\ &= \lambda^2-3\lambda+2 \\ &= (\lambda-1)(\lambda-2)=0 \end{aligned}$$

より, 固有値は $\lambda=1,2$ [3)]. $\lambda=1$ のとき固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

より $-x_1+x_2=0$ から

$$\boldsymbol{x} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R}\setminus\{0\})$$

は対応する固有ベクトルとなる. $\lambda=2$ のとき固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

より $-2x_1+x_2=0$ から

$$\boldsymbol{x} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R}\setminus\{0\})$$

[2)] $e^{BAB^{-1}} = Be^{A}B^{-1}$ が成立することに注意せよ.

[3)] $1+2=3=\mathrm{tr}A=0+3$ より確かに正しそう.

は対応する固有ベクトルとなる. 以上より

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

によって A は

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = B$$

に対角化できる. つまり

$$A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} P^{-1} = PBP^{-1}$$

と変形できる. よって

$$\begin{aligned} e^{tA} &= e^{tPBP^{-1}} \\ &= Pe^{tB}P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2e^t & -e^t \\ -e^{2t} & e^{2t} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2e^t - e^{2t} & -e^t + e^{2t} \\ 2e^t - 2e^{2t} & -e^t + 2e^{2t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(2) (1) を用いて次の連立微分方程式

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -2x + 3y \end{cases}$$

を初期条件 $(x(0), y(0)) = (1, 0)$ とともに解け.

解答例

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

とする. (2) の微分方程式は

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}'(t) = A\boldsymbol{x}(t) \\ \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0 \end{cases}$$

とかけ, その解は

$$\boldsymbol{x}(t) = e^{tA}\boldsymbol{x}_0$$

で与えられるが (1) より

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}(t) &= \begin{pmatrix} 2e^t - e^{2t} & -e^t + e^{2t} \\ 2e^t - 2e^{2t} & -e^t + 2e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2e^t - e^{2t} \\ 2e^t - 2e^{2t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$