2024/10/24/No.6

微分方程式II・自習シート

問 1

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

について

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I,$$

$$A^3 = A^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I,$$

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$

よって

$$\begin{aligned} e^{tA} &= I + tA + \frac{1}{2!}(tA)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}(tA)^n + \cdots \\ &= I + tI + \frac{1}{2!}t^2 I + \cdots + \frac{1}{n!}t^n I + \cdots \\ &= \begin{pmatrix} 1 + t + \frac{1}{2!}t^2 + \cdots + \frac{1}{n!}t^n + \cdots & 0 \\ 0 & 1 + t + \frac{1}{2!}t^2 + \cdots + \frac{1}{n!}t^n + \cdots \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

が求められる. 同様に

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

について B^n, C^n を計算し e^{tB} と e^{tC} をそれぞれ求めよ.

解答例

$$B^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$B^3 = B^2 \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$B^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

提出する場合は, 解答例を参考にして自分で採点をしておくこと. 提出しなくても試験で 60 点以上取れば合格です.

よって

$$
\begin{aligned}
e^{tB} &= I + tB + \frac{1}{2!}(tB)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}(tB)^n + \cdots \\
&= I + t\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2!}t^2\begin{pmatrix} 2^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \cdots + \frac{1}{n!}t^n\begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \cdots \\
&= \begin{pmatrix} 1 + 2t + \frac{1}{2!}(2t)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}(2t)^n + \cdots & 0 \\ 0 & 1 + t + \frac{1}{2!}t^2 + \cdots + \frac{1}{n!}t^n + \cdots \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{gathered}
C^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-1)^2 \end{pmatrix}, \\
C^3 = C^2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-1)^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-1)^3 \end{pmatrix}, \\
C^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix}.
\end{gathered}
$$

よって

$$
\begin{aligned}
e^{tC} &= I + tC + \frac{1}{2!}(tC)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}(tC)^n + \cdots \\
&= I + t\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2!}t^2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-1)^2 \end{pmatrix} + \cdots + \frac{1}{n!}t^n\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix} + \cdots \\
&= \begin{pmatrix} 1 + t + \frac{1}{2!}t^2 + \cdots + \frac{1}{n!}t^n + \cdots & 0 \\ 0 & 1 + (-t) + \frac{1}{2!}(-t)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}(-t)^n + \cdots \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

問 2

$$
A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}
$$

について, 固有値と固有ベクトルを求め, 対角化を行うことで A^n を求めよ.

解答例　固有値と固有ベクトルとは

$$
A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}
$$

を満たす λ と $\mathbf{0}$ でないベクトル $\boldsymbol{x}$ のことである. 右辺を移項すると

$$
(A - \lambda I)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}
$$

だが, もし $A - \lambda I$ が逆行列を持てば,

$$
\begin{gathered}
(A - \lambda I)^{-1}(A - \lambda I)\boldsymbol{x} = (A - \lambda I)^{-1}\mathbf{0}, \\
\boldsymbol{x} = \mathbf{0}
\end{gathered}
$$

となり λ は固有値ではない. $A-\lambda I$ は逆行列をたない, すなわち行列式が 0 となる λ を求めると

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}4-\lambda & -2\\ 1 & 1-\lambda\end{vmatrix}=0,$$
$$(4-\lambda)(1-\lambda)+2=0,$$
$$(\lambda-4)(\lambda-1)+2=0,$$
$$\lambda^2-5\lambda+6=0,$$
$$(\lambda-2)(\lambda-3)=0$$

より $\lambda=2,3$. $\lambda=2$ のとき固有ベクトルは

$$A\boldsymbol{x}=2\boldsymbol{x}$$

を解くと

$$\begin{pmatrix}2 & -2\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

より固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}\quad ({}^\forall t\in\mathbb{R}; t\neq 0).$$

$\lambda=3$ のとき固有ベクトルは

$$A\boldsymbol{x}=3\boldsymbol{x}$$

を解くと

$$\begin{pmatrix}1 & -2\\ 1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

より固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}\quad ({}^\forall t\in\mathbb{R}; t\neq 0).$$

以上より

$$P=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix},\quad P^{-1}=\frac{1}{-1}\begin{pmatrix}1 & -2\\ -1 & 1\end{pmatrix}$$

によって A は対角化できる.

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & -2\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}=:B.$$

さらに $A=PBP^{-1}=B$ より

$$A^2=AA=(PBP^{-1})(PBP^{-1})=PBIBP^{-1}=PBBP^{-1}=PB^2P^{-1},$$

$$A^3=A^2A=(PB^2P^{-1})(PBP^{-1})=PB^2BP^{-1}=PB^3P^{-1},$$
$$A^n=PB^nP^{-1}$$

に注意すると

$$B^n = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} A^n &= PB^nP^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2^n & 2 \cdot 2^n \\ 3^n & -3^n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2^n + 2 \cdot 3^n & 2 \cdot 2^n - 2 \cdot 3^n \\ -2^n + 3^n & 2 \cdot 2^n - 3^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$