微分方程式II・自習シート

問 1　$x := x(t), y := y(t)$ とする．次の連立微分方程式の一般解を次の手順に従って求めよ．

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2x + 2y \\ \dfrac{dy}{dt} = -x - 5y \end{cases}$$

簡単のため $dx/dt = x'$, $dy/dt = y'$ のように表記する．

(1) 2 つめの式 $x = -y' - 5y$ とそれを微分した式

$$x' = -y'' - 5y'$$

を用意する．これらを 1 つめの式に代入することで y だけの微分方程式

$$y'' + 7y' + 12y = 0$$

が得られることを確かめよ．

解答例

$$(-y'' - 5y') = -2(-y' - 5y) - 5y.$$

よって

$$y'' + 7y' + 12y = 0.$$

(2) (1) で得られた微分方程式を解いて一般解 y を求めよ．

解答例

$$y'' + 7y' + 12y = 0$$

の特性方程式

$$\lambda^2 + 7\lambda + 12 = 0,$$

$$(\lambda + 4)(\lambda + 3) = 0$$

より $\lambda = -3, -4$. 以上から一般解は

$$y(t) = C_1 e^{-3t} + C_2 e^{-4t}$$

(3) (2) で得られた y を用いて x を求めよ．

提出する場合は, 解答例を参考にして自分で採点をしておくこと．提出しなくても試験で 60 点以上取れば合格です．

解答例

$$y(t) = C_1 e^{-3t} + C_2 e^{-4t},$$
$$y'(t) = -3C_1 e^{-3t} - 4C_2 e^{-4t}.$$

2 つめの式から

$$\begin{aligned} x &= -y' - 5y \\ &= -(-3C_1 e^{-3t} - 4C_2 e^{-4t}) - 5(C_1 e^{-3t} + C_2 e^{-4t}) \\ &= -2C_1 e^{-3t} - C_2 e^{-4t}. \end{aligned}$$

問 2　$t \in \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ とし,

$$e^{tA}$$

を考える. 次の問いに答えよ.

(1) $h \in \mathbb{R}; h \neq 0$ とする. e^{hA} の第 N 項 ($(hA)^N$ の項) までの和を求めよ.

解答例

$$I + (hA) + \frac{1}{2!}(hA)^2 + \cdots + \frac{1}{N!}(hA)^N$$

(2) $h \in \mathbb{R}; h \neq 0$ とする.

$$\left\| \frac{e^{(t+h)A} - e^{tA}}{h} - Ae^{tA} \right\| \leq \left\| \frac{1}{h}\left(e^{hA} - I\right) - A \right\| \|e^{tA}\|$$

を証明せよ.

解答例　$(hA)(tA) = htA^2 = thA^2 = (tA)(hA)$ より可換なので

$$\begin{aligned} \left\| \frac{e^{(t+h)A} - e^{tA}}{h} - Ae^{tA} \right\| &= \left\| \frac{e^{hA+tA} - e^{tA}}{h} - Ae^{tA} \right\| \\ &= \left\| \frac{1}{h}\left(e^{hA}e^{tA} - Ie^{tA}\right) - Ae^{tA} \right\| \\ &\leq \left\| \frac{1}{h}\left(e^{hA} - I\right) - A \right\| \|e^{tA}\| \end{aligned}$$

(3) $h \to 0$ とすると

$$\left\| \frac{1}{h}\left(e^{hA} - I\right) - A \right\| \to 0$$

であることを, (1) の結果と三角不等式を用いて証明せよ. ただし,

$$\left\| e^{hA} - \left(I + (hA) + \frac{1}{2!}(hA)^2 + \cdots + \frac{1}{N!}(hA)^N \right) \right\| \leq o(h^N)$$

を用いてもよい.

解答例

$$
\begin{aligned}
\left\| \frac{1}{h}\left(e^{hA} - I\right) - A \right\| &= \left\| \frac{1}{h} e^{hA} - \frac{1}{h} I - A \right\| \\
&\leq \left\| \frac{1}{h} e^{hA} - \frac{1}{h}\left(I + (hA) + \frac{1}{2!}(hA)^2 + \cdots + \frac{1}{N!}(hA)^N \right) \right\| \\
&\quad + \left\| \frac{1}{h}\left(I + (hA) + \frac{1}{2!}(hA)^2 + \cdots + \frac{1}{N!}(hA)^N \right) - \frac{1}{h} I - A \right\| \\
&= \left| \frac{1}{h} \right| \left\| e^{hA} - \left(I + (hA) + \frac{1}{2!}(hA)^2 + \cdots + \frac{1}{N!}(hA)^N \right) \right\| \\
&\quad + |h| \left\| \frac{1}{2!} A^2 + \frac{1}{3!} h A^3 + \cdots + \frac{1}{N!} h^{N-2} A^N \right\| \\
&\leq \frac{o(h^N)}{|h|} + |h| \left\| \frac{1}{2!} A^2 + \frac{1}{3!} h A^3 + \cdots + \frac{1}{N!} h^{N-2} A^N \right\| \\
&\to 0
\end{aligned}
$$