2024/10/24/No.5

微分方程式II・自習シート

問1　$A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, すなわち n 次正方行列とする. 以下を手順に従って証明せよ [1].

e^A の逆行列 $(e^A)^{-1}$ は e^{-A} と等しい.

(1) 講義で証明した「$AB = BA$ ならば $e^Ae^B = e^Be^A = e^{A+B}$」を用いて,

$$e^Ae^{-A} = e^{-A}e^A = I$$

を証明せよ.

解答例　B として $-A$ をとると $A + (-A) = O$ より

$$e^Ae^{-A} = e^O$$

一方, $e^O = I$ であったので

$$(\text{左辺}) = e^Ae^{-A} = e^O = I = (\text{右辺})$$

同様に, $e^{-A}e^A = I$ も証明できる.

(2) 線形代数のテキストを調べて A の逆行列 A^{-1} の**定義**をかけ.

解答例　$AB = BA = I$ を満たす行列 B のことを A の逆行列といい, B のことを A^{-1} とかく.

(3) $(e^A)^{-1} = e^{-A}$ を証明せよ.

解答例　(1) より $(e^A)^{-1} = e^{-A}$.

提出する場合は, 解答例を参考にして自分で採点をしておくこと. 提出しなくても試験で 60 点以上取れば合格です.

[1] ただし, A を例えば

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

とすると $-A$ とは $(-1)A$, つまり次の行列を意味する:

$$-A = \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & \cdots & \cdots & -a_{nn} \end{pmatrix}$$

問 2　$A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, すなわち n 次正方行列とする. 以下を手順に従って証明せよ.

> B が逆行列を持つならば
> $$Be^{A}B^{-1} = e^{BAB^{-1}}$$

(1) $(BAB^{-1})^2$ は指数を積でかくと

$$\begin{aligned}(BAB^{-1})^2 &= (BAB^{-1})(BAB^{-1})\\ &= BAB^{-1}BAB^{-1}\\ &= BAIAB^{-1}\\ &= BAAB^{-1}\\ &= BA^2B^{-1}\end{aligned}$$

と計算できる (ここで $B^{-1}B = I$ を用いた). $(BAB^{-1})^3$ や $(BAB^{-1})^n$ をそれぞれ求めよ.

解答例　$(BAB^{-1})^2 = BA^2B^{-1}$ より

$$\begin{aligned}(BAB^{-1})^3 &= (BAB^{-1})^2(BAB^{-1})\\ &= (BA^2B^{-1})(BAB^{-1})\\ &= BA^2B^{-1}BAB^{-1}\\ &= BA^2IAB^{-1}\\ &= BA^2AB^{-1}\\ &= BA^3B^{-1}\end{aligned}$$

帰納的に

$$\begin{aligned}(BAB^{-1})^n &= (BAB^{-1})^{n-1}(BAB^{-1})\\ &= (BA^{n-1}B^{-1})(BAB^{-1})\\ &= BA^{n-1}B^{-1}BAB^{-1}\\ &= BA^{n-1}IAB^{-1}\\ &= BA^{n-1}AB^{-1}\\ &= BA^nB^{-1}\end{aligned}$$

を得る (厳密には数学的帰納法を用いて証明できる).

(2) $e^{BAB^{-1}}$ の級数による定義をかけ, また, その第 N 項までの和 S_N をかけ.

解答例　I を第 0 項と数えるならば

$$e^{BAB^{-1}} = I + (BAB^{-1}) + \frac{1}{2!}(BAB^{-1})^2 + \cdots + \frac{1}{N!}(BAB^{-1})^N$$

(なお I を第 1 項と数えるならば

$$e^{BAB^{-1}} = I + (BAB^{-1}) + \frac{1}{2!}(BAB^{-1})^2 + \cdots + \frac{1}{(N-1)!}(BAB^{-1})^{N-1}$$

であるがどちらでも本質的に違いはない. 以降 (3) では上を採用している.)

(3)

$$\|Be^AB^{-1}-S_N\| \leq \|B\|\left\|e^A-\left(I+A+\frac{1}{2!}A^2+\cdots+\frac{1}{N!}A^N\right)\right\|\|B^{-1}\|$$

を示せ.

解答例　(1) とフロベニウスノルムの性質 $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$ より

$$\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= \|Be^AB^{-1}-S_N\| \\
&= \left\|Be^AB^{-1}-\left(I+(BAB^{-1})+\frac{1}{2!}(BAB^{-1})^2+\cdots+\frac{1}{N!}(BAB^{-1})^N\right)\right\| \\
&= \left\|Be^AB^{-1}-\left(BB^{-1}+(BAB^{-1})+\frac{1}{2!}(BA^2B^{-1})+\cdots+\frac{1}{N!}(BA^NB^{-1})\right)\right\| \\
&= \left\|Be^AB^{-1}-\left(BIB^{-1}+BAB^{-1}+B\frac{1}{2!}A^2B^{-1}+\cdots+B\frac{1}{N!}A^NB^{-1}\right)\right\| \\
&= \left\|B\left(e^A-I+A+\frac{1}{2!}A^2+\cdots+\frac{1}{N!}A^N\right)B^{-1}\right\| \\
&\leq \|B\|\left\|e^A-\left(I+A+\frac{1}{2!}A^2+\cdots+\frac{1}{N!}A^N\right)\right\|\|B^{-1}\| = (\text{右辺})
\end{aligned}$$

(4) 三角不等式

$$\|Be^AB^{-1}-e^{BAB^{-1}}\| \leq \|Be^AB^{-1}-S_N\|+\|S_N-e^{BAB^{-1}}\|$$

を用いて, $Be^AB^{-1}=e^{BAB^{-1}}$ を証明せよ.

解答例　e^A や $e^{BAB^{-1}}$ の定義から $N\to\infty$ とすると

$$\left\|e^A-\left(I+A+\frac{1}{2!}A^2+\cdots+\frac{1}{N!}A^N\right)\right\| \to 0$$

$$\|S_N-e^{BAB^{-1}}\| \to 0$$

よって

$$\|Be^AB^{-1}-e^{BAB^{-1}}\| \leq \|Be^AB^{-1}-S_N\|+\|S_N-e^{BAB^{-1}}\| \to 0$$

すなわち

$$\|Be^AB^{-1}-e^{BAB^{-1}}\| = 0$$

これは, $Be^AB^{-1}-e^{BAB^{-1}}=O$, いいかえれば

$$Be^AB^{-1}=e^{BAB^{-1}}$$

を意味する.

問 3　次の微分方程式を考える. $x=x(t)$ とし

$$x''+2x'+5x=0 \tag{1}$$

新しく未知関数 x_1 を x の 1 階微分 x' とおく, つまり $x_1=x'$ とおく. このとき, この微分方程式から

$$x''+2x'+5x=x_1'+2x_1+5x=0$$

が得られるので (2) は

$$\begin{cases} x' = x_1 \\ x_1' + 2x_1 + 5x \quad = 0 \end{cases}$$

と同値である. **つまり次の定数係数斉次 (同次) 線形微分方程式**

$$x'' + a_1 x' + a_2 x = 0$$

や

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + a_2 x^{(n-2)} + \cdots a_{n-1} x' + a_n x = 0$$

は**必ず 1 階の連立微分方程式に書き換えられる**. 次の微分方程式を 1 階の連立微分方程式にそれぞれ書き換えよ.

(1) $x'' + 8x' + 16x = 0$

(2) $x''' + 6x'' + 12x' + 8x = 0$

(3) $x''' - 3x'' + 4x = 0$

(4) $x^{(4)} - 3x''' + 3x'' - x' = 0$

解答例　(1) 新しく未知関数 x_1 を x の 1 階微分 x' とおく, つまり $x_1 = x'$ とおく. このとき, この微分方程式から

$$x'' + 8x' + 16x = x_1' + 8x_1 + 16x = 0$$

が得られるので

$$\begin{cases} x' = x_1 \\ x_1' + 8x_1 + 16x \quad = 0 \end{cases}$$

と同値である.

(2) 新しく未知関数 x_1 を $x_1 = x'$, x_2 を $x_2 = x_1'(= x'')$ とおく. このとき, この微分方程式から

$$x''' + 6x'' + 12x' + 8x = x_2' + 6x_2 + 12x_1 + 8x = 0$$

が得られるので

$$\begin{cases} x' = x_1 \\ x_1' = x_2 \\ x_2' + 6x_2 + 12x_1 + 8x \quad = 0 \end{cases}$$

と同値である.

(3) 新しく未知関数 x_1 を $x_1 = x'$, x_2 を $x_2 = x_1'(= x'')$ とおく. このとき, この微分方程式から

$$x''' - 3x'' + 4x = x_2' - 3x_2 + 4x = 0$$

が得られるので

$$\begin{cases} x' = x_1 \\ x_1' = x_2 \\ x_2' - 3x_2 + 4x \quad = 0 \end{cases}$$

と同値である.
(4) 新しく未知関数 x_1 を $x_1 = x'$, x_2 を $x_2 = x_1'(= x'')$, x_3 を $x_3 = x_2' = (x''')$ とおく. このとき, この微分方程式から

$$x^{(4)} - 3x''' + 3x'' - x' = x_3' - 3x_3 + 3x_2 - x_1 = 0$$

が得られるので

$$\begin{cases} x' = x_1 \\ x_1' = x_2 \\ x_2' = x_3 \\ x_3' - 3x_3 + 3x_2 - x_1 \quad = 0 \end{cases}$$

と同値である.

問 4　次の微分方程式を考える. $x = x(t)$ とし

$$x'' + 2x' + 5x = 0 \tag{2}$$

問 3 より (2) は

$$\begin{cases} x' &= \quad x_1 \\ x_1' &= -5x - 2x_1 \end{cases}$$

と同値である. そこでベクトル $\boldsymbol{x}$ を

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ x_1 \end{pmatrix}$$

と定義すれば [2],

$$\boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} x' \\ x_1' \end{pmatrix}$$

でさらに連立微分方程式は行列を用いて

$$\begin{pmatrix} x' \\ x_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ -5x - 2x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x_1 \end{pmatrix}$$

結局, 微分方程式 (2) は

$$\begin{pmatrix} x' \\ x_1' \end{pmatrix} = \boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x_1 \end{pmatrix}$$

のように $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$ と同値である. **つまり次の定数係数斉次 (同次) 線形微分方程式**

$$x'' + a_1 x' + a_2 x = 0$$

や

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + a_2 x^{(n-2)} + \cdots a_{n-1} x' + a_n x = 0$$

は, **行列 A を用いて必ず $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$ に書き換えられる**. 次の微分方程式を $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$ に書き換えるための行列 A をそれぞれ求めよ.

[2] x を x_0 だと思えば第 0 成分, 第 1 成分と縦に並べたベクトルと見なせる

(1) $x'' + 8x' + 16x = 0$

(2) $x''' + 6x'' + 12x' + 8x = 0$

(3) $x''' - 3x'' + 4x = 0$

(4) $x^{(4)} - 3x''' + 3x'' - x' = 0$

解答例　問 3 の解答例を用いる．

(1)

$$\begin{cases} x' = x_1 \\ x_1' + 8x_1 + 16x \quad = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x' & = & x_1 \\ x_1' & = -16x - 8x_1 \end{cases}$$

と同値であったので

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ x_1 \end{pmatrix}$$

と定義すれば

$$\begin{pmatrix} x' \\ x_1' \end{pmatrix} = \boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -16 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x_1 \end{pmatrix}$$

のように $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$ と同値である．すなわち

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -16 & -8 \end{pmatrix}$$

(2)

$$\begin{cases} x' = x_1 \\ x_1' = x_2 \\ x_2' + 6x_2 + 12x_1 + 8x \quad = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x' & = & x_1 \\ x_1' & = & x_2 \\ x_2' & = -8x - 12x_1 - 6x_2 \end{cases}$$

と同値であったので

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

と定義すれば

$$\begin{pmatrix} x' \\ x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -8 & -12 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

のように $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$ と同値である．すなわち

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -8 & -12 & -6 \end{pmatrix}$$

(3)

$$\begin{cases} x' = x_1 \\ x_1' = x_2 \\ x_2' - 3x_2 + 4x \quad = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x' & = & x_1 \\ x_1' & = & x_2 \\ x_2' & = -4x & + 3x_2 \end{cases}$$

と同値であったので

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

と定義すれば

$$\begin{pmatrix} x' \\ x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

のように $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$ と同値である．すなわち

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(4)

$$\begin{cases} x' = x_1 \\ x_1' = x_2 \\ x_2' = x_3 \\ x_3' - 3x_3 + 3x_2 - x_1 \quad = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x' & = & x_1 \\ x_1' & = & x_2 \\ x_2' & = & x_3 \\ x_3' & = & x_1 - 3x_2 + 3x_3 \end{cases}$$

と同値であったので

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

と定義すれば

$$\begin{pmatrix} x' \\ x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

のように $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$ と同値である．すなわち

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$