2023/10/11/No.3

微分方程式II・自習シート

問 1　次の $f(x)$, $g(x)$ の $x=0$ における n 次近似式を，ランダウの記号 o を用いて等式で求めよ．

(1) $f(x) = \log(1+x)$

(2) $g(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2}$

解答例　(1)

$$\begin{gathered}
f(x) = \log(1+x), \quad f(0) = \log(1+0) = 0, \\
f'(x) = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}, \quad f'(0) = \frac{1}{1+0} = 1, \\
f''(x) = -(1+x)^{-2}, \quad f''(0) = -\frac{1}{(1+0)^2} = -1, \\
f^{(3)}(x) = -(-2)(1+x)^{-3}, \quad f^{(3)}(0) = -(-2)(1+0)^{-3} = 2, \\
\vdots \\
f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!(1+x)^{-n}, \quad f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!(1+0)^{-n} = (-1)^{n-1}(n-1)!.
\end{gathered}$$

よって

$$\begin{aligned}
\log(1+x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2!}f''(0)x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n + o(x^n) \\
&= 1x - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}2!x^3 - \frac{1}{4!}3!x^4 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n!}(n-1)!x^n + o(x^n) \\
&= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n + o(x^n).
\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{gathered}
g(x) = \frac{1}{(1-x)^2} = (1-x)^{-2}, \quad g(0) = \frac{1}{(1-0)^2} = 1, \\
g'(x) = -2(1-x)^{-3}\cdot(1-x)' = 2(1-x)^{-3}, \quad g'(0) = 2(1-0)^{-3} = 2, \\
g''(x) = 2(-3)(1-x)^{-4}\cdot(1-x)' = 3!(1-x)^{-4}, \quad g''(0) = 3!(1-0)^{-4} = 3!, \\
g^{(3)}(x) = 3!(-4)(1-x)^{-5}\cdot(1-x)' = 4!(1-x)^{-5}, \quad g^{(3)}(0) = 4!(1-0)^{-5} = 4!, \\
\vdots \\
g^{(n)}(x) = (n+1)!(1-x)^{-n+2}, \quad g^{(n)}(0) = (n+1)!(1-0)^{-n+2} = (n+1)!.
\end{gathered}$$

提出する場合は，解答例を参考にして自分で採点をしておくこと．提出しなくても試験で 60 点以上取れば合格です．

よって

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1-x)^2} &= g(0) + g'(0)x + \frac{1}{2!}g''(0)x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}g^{(n)}(0)x^n + o(x^n)\\ &= 1 + 2x + \frac{1}{2!}3!x^2 + \frac{1}{3!}4!x^3 + \frac{1}{4!}5!x^4 + \cdots + \frac{1}{n!}(n+1)!x^n + o(x^n)\\ &= 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + \cdots + (n+1)x^n + o(x^n).\end{aligned}$$

問 2　A を $n \times n$ 行列とする．以後，行列を

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

とかくことにする．「実数の大きさの数値化」である絶対値のように，「行列 A の大きさ」の数値化として**ノルム**[1]を

$$\|A\| := \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2} \qquad \left(つまり = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2\right)} \right)$$
$$= \sqrt{a_{11}^2 + a_{12}^2 + \cdots + a_{1n}^2 + a_{21}^2 + \cdots + a_{nn}^2} \quad (i, j = 1 \text{ から } i, j = n \text{ までのすべての和})$$

を定義する (A のフロベニウスノルムと呼ぶことがある)．このとき，次の行列 A, B, I に対して $\|A\|$, $\|B\|$, $\|I\|$ の値をそれぞれ求めよ．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 10 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

解答例

$$\|A\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 8^2 + 10^2} = \sqrt{169} = 13$$
$$\|B\| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 0^2 + 1^2 + 2^2 + 1^2 + 0^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{16} = 4$$
$$\|I\| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

[1] 行列式 $|A|$ とは異なることに注意．実際，行列 A

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

の行列式

$$|A| = |ad - bd|$$

は行列の大きさの数値化としては不適切である．例えば

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

の行列式 $|C|$ は 0 であるが，C 自身は成分がすべて 0 の行列ではなく，実数 r に対して $|r| = 0$ ならばまたそのときに限り $r = 0$ であるという「大きさの数値化」の前提 (ノルムの定義) を満たしていない．行列式はその行列が作る変換の面積倍率を意味している．