2024/09/19/No.2

微分方程式II・自習シート

問 1　I を区間とし, $f \in C^2(I)$ とする [1]

$$f(a+h) \fallingdotseq f(a) + f'(a)h + \frac{1}{2}f''(a)h^2,$$

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{1}{2}f''(a)h^2 + \varepsilon_2(h), \quad \text{ただし}, \lim_{h\to 0}\frac{\varepsilon_2(h)}{h^2} = 0,$$

$$f(x) \fallingdotseq f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2, \tag{1}$$

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 + \varepsilon_2(x), \quad \text{ただし}, \lim_{x\to a}\frac{\varepsilon_2(x)}{(x-a)^2} = 0,$$

が成立する (講義で証明済み). (1) の右辺の式

$$f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2$$

を $f(x)$ の $x=a$ における 2 次近似式と呼ぶ. 次の関数 $f(x)$ の括弧内の点における 2 次近似式を求めよ.

(1) $f(x) = e^x \quad (x=0)$

(2) $f(x) = \sin x \quad (x=0)$

(3) $f(x) = \sqrt{x} \quad (x=1)$

解答例　(1)

$$\begin{aligned} f(x) &= e^x, & f(0) &= e^0 = 1, \\ f'(x) &= e^x, & f'(0) &= e^0 = 1, \\ f''(x) &= e^x, & f''(0) &= e^0 = 1. \end{aligned}$$

よって, $x=0$ における 2 次近似式は

$$f(0) + f'(0)(x-0) + \frac{1}{2}f''(0)(x-0)^2 = 1 + x + \frac{1}{2}x^2.$$

(2)

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin x, & f(0) &= \sin 0 = 0, \\ f'(x) &= \cos x, & f'(0) &= \cos 0 = 1, \\ f''(x) &= -\sin x, & f''(0) &= -\sin 0 = 0. \end{aligned}$$

よって, $x=0$ における 2 次近似式は

$$f(0) + f'(0)(x-0) + \frac{1}{2}f''(0)(x-0)^2 = x.$$

提出する場合は, 解答例を参考にして自分で採点をしておくこと. 提出しなくても試験で 60 点以上取れば合格です.

[1] $C^2(I) := \{f : I \to \mathbb{R} \mid f$ は微分可能で, その導関数も微分可能で f, f', f'' は連続 $\}$

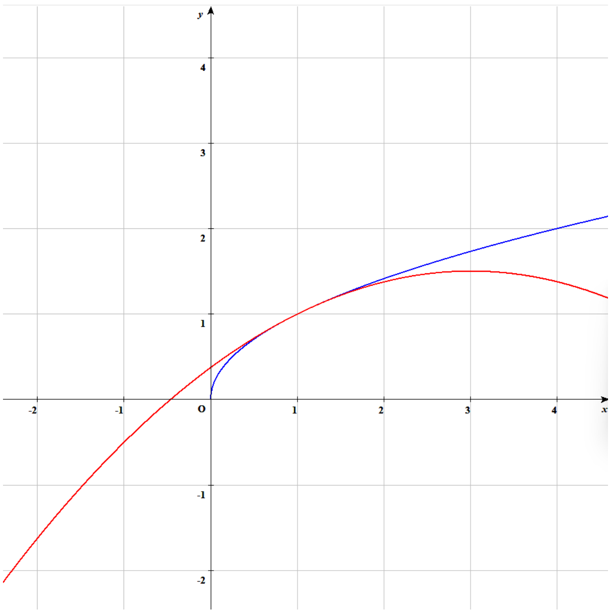
(3)

$$f(x)=\sqrt{x}=x^{1/2},\quad f(1)=\sqrt{1}=1,$$
$$f'(x)=\frac{1}{2}x^{-1/2},\quad f'(1)=\frac{1}{2},$$
$$f''(x)=-\frac{1}{4}x^{-3/2},\quad f''(1)=-\frac{1}{4}.$$

よって, $x=1$ における 2 次近似式は

$$\begin{aligned}f(1)+f'(1)(x-1)+\frac{1}{2}f''(1)(x-1)^2&=1+\frac{1}{2}(x-1)+\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)(x-1)^2\\&=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}-\frac{1}{8}(x^2-2x+1)\\&=\frac{3}{8}+\frac{3}{4}x-\frac{1}{8}x^2.\end{aligned}$$

注: (3) の幾何的解釈



青い曲線が $y=\sqrt{x}$ のグラフで, 赤い曲線が

$$y=\frac{3}{8}+\frac{3}{4}x-\frac{1}{8}x^2$$

のグラフである. $x=1$ において両者は接しており, $x=1$ の付近を二次関数で近似していることが見て取れる.

問 2[線形代数の復習] 実数 $\mathbb{R}$ には絶対値 $|\cdot|$ が定義されている. 絶対値は次の 3 条件を満たす: どのような $x,y\in\mathbb{R}$ に対しても

(i) 常に $|x|\geq 0$ である. 特に「$|x|=0 \iff x=0$」;

(ii) x の定数倍 rx について, $|rx|=|r||x|$ がどのような $r\in\mathbb{R}$ に対しても成立する;

(iii) $|x+y|\leq|x|+|y|$ が成立する.

これを一般化して**ノルム**とよばれる大きさを測る関数 $\|\cdot\|$ を定義する．すなわちある集合 V に対して [2]次の 3 条件を満たすとき $\|\cdot\|$ を V のノルムという: どのような $x, y \in V$ に対しても

(i) 常に $\|x\| \geq 0$ である．特に「$\|x\| = 0 \iff x$ は V の空間における 0」;

(ii) x の定数倍 rx について, $\|rx\| = |r|\|x\|$ がどのような $r \in \mathbb{R}$ に対しても成立する;

(iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ が成立する．

(例題) の解答を参考に, 次の (問い) に答えよ．ただし三角不等式の証明にはシュワルツの不等式 [3]を用いてよい．

(例題) $V := \mathbb{C}$ とする．$\alpha \in V$ に対して, $\alpha := a + bi$ とおき

$$\|\alpha\| := \sqrt{a^2 + b^2}$$

で定義すると $\|\cdot\|$ は V のノルムになることを証明せよ．

(問い) $V := \mathbb{R}^{n\times n}$, つまり n 次正方行列とする．$A \in V$ に対して,

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

とおき

$$\|A\| := \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2}$$

で定義すると $\|\cdot\|$ は V のノルムになることを証明せよ．

例題の解答　(1) ノルムの 3 条件を満たすことを示す．$\alpha, \beta \in V$ とし,

$$\alpha := a + bi, \quad \beta := c + di$$

とおく．
(i) $\|\alpha\| = \sqrt{a^2 + b^2} \geq 0$. 特に, $\|\alpha\| = 0$ のとき,

$$0 = \sqrt{a^2 + b^2} \geq \sqrt{a^2} = |a|$$

より $a = 0$. 同様に

$$0 = \sqrt{a^2 + b^2} \geq \sqrt{b^2} = |b|$$

より $b = 0$. つまり $\alpha = 0+0i = 0$. 逆に $\alpha = 0$ ならば $a = b = 0$. よって $\|\alpha\| = \sqrt{0^2 + 0^2} = 0$ より, ノルムの条件 (i) を満たす．

---

[2] V には和と定数倍が定義されていてとある性質を満たしていることを要請するがここではそれについては述べない．すなわち, 厳密には「V は線形空間とする」と言っておく必要がある．

[3]

$$ac + bd \leq \sqrt{a^2 + b^2}\sqrt{c^2 + d^2}, \quad \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}b_{ij} \leq \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2}\sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}^2}$$

次に $r \in \mathbb{R}$ とする．$r\alpha = (ra) + (rb)i$ に注意して

$$\begin{aligned}\|r\alpha\| &= \sqrt{(ra)^2 + (rb)^2} \\ &= |r|\sqrt{a^2 + b^2} \\ &= |r|\|\alpha\|.\end{aligned}$$

よって, ノルムの条件 (ii) を満たす.

最後に $\alpha + \beta = (a + c) + (b + d)i$ に注意して, シュワルツの不等式を用いると

$$\begin{aligned}\|\alpha + \beta\|^2 &= (a + c)^2 + (b + d)^2 \\ &= a^2 + 2ac + c^2 + b^2 + 2bd + d^2 \\ &\leq (a^2 + c^2) + 2\sqrt{a^2 + c^2}\sqrt{b^2 + d^2} + (b^2 + d^2) \\ &= (\|\alpha\| + \|\beta\|)^2.\end{aligned}$$

よって, $\|\alpha + \beta\| \leq \|\alpha\| + \|\beta\|$ が得られ, ノルムの条件 (iii) を満たす.

以上より, $\|\cdot\|$ は V のノルムである． $\square$

問いの解答例　ノルムの 3 条件を満たすことを示す．$A, B \in V$ とし,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

とおく.

(i)

$$\|A\| = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2} \geq 0.$$

特に, $\|A\| = 0$ のとき,

$$0 = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2} \geq \sqrt{a_{kl}^2} = |a_{kl}|$$

つまり $a_{kl} = 0$ がすべての $k, l \in \mathbb{N}; 1 \leq k, l \leq n$ について成立する．よって $A = O$. ただし,

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

逆に $A = O$ ならば $a_{kl} = 0$ がすべての $k, l \in \mathbb{N}; 1 \leq k, l \leq n$ について成立する．よって $\|A\| = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2} = 0$ よりノルムの条件 (i) を満たす.

次に $r \in \mathbb{R}$ とする.

$$rA = \begin{pmatrix} ra_{11} & ra_{12} & \cdots & ra_{1n} \\ ra_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ ra_{n1} & \cdots & \cdots & ra_{nn} \end{pmatrix}$$

に注意して,

$$
\begin{aligned}
\|rA\| &= \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n}(ra_{ij})^2} \\
&= |r|\sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2} \\
&= |r|\|A\|.
\end{aligned}
$$

よって, ノルムの条件 (ii) を満たす.
　最後に

$$
\begin{aligned}
A+B &:= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1}+b_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn}+b_{nn} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

に注意して, シュワルツの不等式を用いると

$$
\begin{aligned}
\|A+B\|^2 &= \sum_{i,j=1}^{n}(a_{ij}+b_{ij})^2 \\
&= \sum_{i,j=1}^{n}(a_{ij}^2 + 2a_{ij}b_{ij} + b_{ij}^2) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2 + 2\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}b_{ij} + \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}^2 \\
&\leq \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2 + 2\sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2}\sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}^2} + \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}^2 \\
&= (\|A\| + \|B\|)^2.
\end{aligned}
$$

よって, $\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$ が得られ, ノルムの条件 (iii) を満たす.
　以上より, $\|\cdot\|$ は V のノルムである. □

注:　問 2 の趣旨
　行列の世界にも実数や複素数のように絶対値に相当する**ノルム** $\|A\|$ によって, **行列の大きさ**を数値化することができる. 大きさの数値化である以上, $\|A\| = 0$ を満たすならば行列 A は O であってほしいし, 行列 A を r 倍したとき rA の大きさも r 倍されてほしいが, 確かに $\|rA\| = |r|\|A\|$ からそれを満たしてると言える.
　なお, このように実数や複素数と同様に, たし算や定数倍が定義できる集合のことを**線形空間**や**ベクトル空間**とよび, さらにノルムが定義されている空間を**ノルム空間**とよぶことを線形代数で学んだ.