微分方程式II・自習シート

問　A の固有値と固有ベクトルを求め, さらに e^{tA} を求めよ (ただし各正則行列 P, Q, R およびその逆行列は一例なので, それを別に求めておけば e^{tA} の表示ではそのまま P, Q, R を用いてよい).

(1)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

解答例

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 4 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} &= (3-\lambda)(1-\lambda) - 8 \\ &= (\lambda-3)(\lambda-1) - 8 \\ &= \lambda^2 - 4\lambda - 5 \\ &= (\lambda+1)(\lambda-5) = 0 \end{aligned}$$

より, 固有値は $\lambda = 5, -1$ [1]. $\lambda = 5$ のとき固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

より $2v_1 - 4v_2 = 0$ から

$$\boldsymbol{v} = s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ({}^\forall s \in \mathbb{R}; s \neq 0)$$

は対応する固有ベクトルとなる. $\lambda = -1$ のとき固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

より $2v_1 + 2v_2 = 0$ から

$$\boldsymbol{v} = s \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad ({}^\forall s \in \mathbb{R}; s \neq 0)$$

は対応する固有ベクトルとなる.

以上より, 例えば

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

提出する場合は, 解答例を参考にして自分で採点をしておくこと. 提出しなくても試験で 60 点以上取れば合格です.

[1] $5 + (-1) = 4 = \mathrm{tr}A = 3 + 1$ より確かに正しそう.

によって A は

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

に対角化できる．つまり

$$A = P \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1}$$

と変形できる．よって

$$e^{tA} = P \begin{pmatrix} e^{5t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} P^{-1}$$

$\square$

(2)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

解答例

$$\begin{aligned}\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ -1 & 4-\lambda \end{vmatrix} &= (2-\lambda)(4-\lambda)+1 \\ &= (\lambda-2)(\lambda-4)+1 \\ &= \lambda^2-6\lambda+9 \\ &= (\lambda-3)^2 = 0\end{aligned}$$

より，固有値は $\lambda = 3$ [2)]．$\lambda = 3$ のとき固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

より $-v_1 + v_2 = 0$ から

$$\boldsymbol{v} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ({}^\forall t \in \mathbb{R}; t \neq 0)$$

は対応する固有ベクトルとなる．また $(A-3I)\boldsymbol{w} = \boldsymbol{v}$ を満たす $\boldsymbol{w}$ として

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

を解くと，例えば $-w_1 + w_2 = 1$ より

$$\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

が選べる．以上より例えば

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

---

2) $3+3=6=\mathrm{tr}A = 2+4$ より確かに正しそう．

によって A は

$$R^{-1}AR = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

に変形できる. つまり

$$A = R\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}R^{-1}$$

と変形できる. よって

$$e^{tA} = e^{3t}R\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}R^{-1} \quad \left(= R\begin{pmatrix} e^{3t} & te^{3t} \\ 0 & e^{3t} \end{pmatrix}R^{-1} \text{ でもよい} \right).$$

□

(3)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

解答例

$$\begin{aligned} \det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ 4 & -1-\lambda \end{vmatrix} &= (3-\lambda)(-1-\lambda)+8 \\ &= (\lambda-3)(\lambda+1)+8 \\ &= \lambda^2-2\lambda+5 \\ &= 0 \end{aligned}$$

より, 固有値は $\lambda = 1 \pm 2i$ [3]. $\lambda = 1+2i$ のとき固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} 2-2i & -2 \\ 4 & -2-2i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

より $(2-2i)v_1 - 2v_2 = 0$ から $(1-i)v_1 - v_2 = 0$

$$\boldsymbol{v} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + ti\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad ({}^\forall t \in \mathbb{R}; t \neq 0)$$

は対応する固有ベクトルとなる. $\lambda = 1-2i$ のとき固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} 2+2i & -2 \\ 4 & -2+2i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

より $(2+2i)v_1 - 2v_2 = 0$ から $(1+i)v_1 - v_2 = 0$

$$\boldsymbol{v} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - ti\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad ({}^\forall t \in \mathbb{R}; t \neq 0)$$

は対応する固有ベクトルとなる. 以上より例えば

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

[3] $(1+2i)+(1-2i) = 2 = \mathrm{tr}A = 3-1$ より確かに正しそう.

によって A は

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

に変形できる．つまり

$$A = e^t Q \begin{pmatrix} \cos 2t & \sin 2t \\ -\sin 2t & \cos 2t \end{pmatrix} Q^{-1}$$

と変形できる．よって

$$e^{tA} = e^t Q \begin{pmatrix} \cos 2t & \sin 2t \\ -\sin 2t & \cos 2t \end{pmatrix} Q^{-1} \quad \left(= Q \begin{pmatrix} e^t \cos 2t & e^t \sin 2t \\ -e^t \sin 2t & e^t \cos 2t \end{pmatrix} Q^{-1} \text{ でもよい} \right).$$

□