# 微分方程式II・自習シート

**問1**　次の行列 $A$ の固有値と固有ベクトルを考える.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

固有方程式は

$$\begin{aligned} \det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} &= (1-\lambda)^2+4 \\ &= \lambda^2-2\lambda+1+4 \\ &= \lambda^2-2\lambda+5=0 \end{aligned}$$

より, 実数解を持たず固有値は $\lambda = 1+2i, 1-2i$ のように複素数になる [1]. 実数の固有値を持つ場合と同様に固有ベクトルを求めると $\lambda = 1+2i$ のとき固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} -2i & 2 \\ -2 & -2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

より $-2iv_1+2v_2=0$ から (下の $-2v_1-2iv_2=0$ を使っても同じ結果は得られる)

$$\boldsymbol{v} = t\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix} \quad ({}^\forall t \in \mathbb{C}; t \neq 0)$$

が対応する固有ベクトルとなる (ただし, $t$ を複素数から選ぶ). $\lambda = 1-2i$ のとき固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} 2i & 2 \\ -2 & 2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

より $2iv_1+2v_2=0$ から

$$\boldsymbol{v} = t\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - t\begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix} \quad ({}^\forall t \in \mathbb{C}; t \neq 0)$$

が対応する固有ベクトルとなる. ここで, $\lambda = 1 \pm 2i$ に対応する固有ベクトルは

$$\boldsymbol{v} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \pm t\begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix}$$

のように共役な関係にある.

次の行列の固有値と固有ベクトルをそれぞれ求めよ.

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$$

---

提出する場合は, 解答例を参考にして自分で採点をしておくこと. 提出しなくても試験で 60 点以上取れば合格です.

[1] $(1+2i)+(1-2i) = \mathrm{tr}A = 1+1$ より確かに正しそう.

**解答例**　行列 $B$ に対して固有方程式は

$$\det(B-\lambda I)=\begin{vmatrix}-2-\lambda & 1\\ -1 & -2-\lambda\end{vmatrix}=(-2-\lambda)^2+1$$
$$=\lambda^2+4\lambda+4+1$$
$$=\lambda^2+4\lambda+5=0$$

より, 固有値は $\lambda=-2+i,-2-i$ である[2]. 実数の固有値を持つ場合と同様に固有ベクトルを求めると $\lambda=-2+i$ のとき固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix}-i & 1\\ -1 & -i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

より $-iv_1+v_2=0$ から

$$\boldsymbol{v}=t\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0\\ i\end{pmatrix}\quad({}^{\forall}t\in\mathbb{C};t\neq 0)$$

が対応する固有ベクトルとなる. $\lambda=-2-i$ のとき固有ベクトルは, 上の固有ベクトルの共役な複素数値を考えれば

$$\boldsymbol{v}=t\begin{pmatrix}1\\ -i\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}-t\begin{pmatrix}0\\ i\end{pmatrix}\quad({}^{\forall}t\in\mathbb{C};t\neq 0)$$

が対応する固有ベクトルとなる[3].

行列 $C$ に対して固有方程式は

$$\det(C-\lambda I)=\begin{vmatrix}-\lambda & 1\\ -1 & -\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2+1=0$$

より, 固有値は $\lambda=i,-i$ である[4]. 実数の固有値を持つ場合と同様に固有ベクトルを求めると $\lambda=i$ のとき固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix}-i & 1\\ -1 & -i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

より $-iv_1+v_2=0$ から

$$\boldsymbol{v}=t\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0\\ i\end{pmatrix}\quad({}^{\forall}t\in\mathbb{C};t\neq 0)$$

が対応する固有ベクトルとなる. $\lambda=-i$ のとき固有ベクトルは上の固有ベクトルの共役な複素数値を考えれば

$$\boldsymbol{v}=t\begin{pmatrix}1\\ -i\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}-t\begin{pmatrix}0\\ i\end{pmatrix}\quad({}^{\forall}t\in\mathbb{C};t\neq 0)$$

---

[2] $(-2+i)+(-2-i)=\mathrm{tr}A=-2+(-2)$ より確かに正しそう.

[3] $\lambda=-2-i$ のとき固有ベクトルを

$$\begin{pmatrix}i & 1\\ -1 & i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

より $iv_1+v_2=0$ から**もし他の表現として**

$$\boldsymbol{v}=s\begin{pmatrix}i\\ 1\end{pmatrix}\quad({}^{\forall}s\in\mathbb{C};s\neq 0)$$

を選んでいたとしても $s=-it$ を選べば

$$\boldsymbol{v}=s\begin{pmatrix}i\\ 1\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}1\\ -i\end{pmatrix}\quad({}^{\forall}t\in\mathbb{C};t\neq 0)$$

のように必ず共役な複素数の形をした固有ベクトルに直せる.

[4] $i+(-i)=\mathrm{tr}A=0$ より確かに正しそう.

が対応する固有ベクトルとなる.

行列 $D$ に対して固有方程式は

$$\begin{aligned}\det(D-\lambda I)=\begin{vmatrix}1-\lambda & 1\\ -5 & 3-\lambda\end{vmatrix} &= (1-\lambda)(3-\lambda)+5\\ &= (\lambda-1)(\lambda-3)+5\\ &= \lambda^2-4\lambda+8=0\end{aligned}$$

より, 固有値は $\lambda=2+2i, 2-2i$ である[5]. 実数の固有値を持つ場合と同様に固有ベクトルを求めると $\lambda=i$ のとき固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix}-1-2i & 1\\ -5 & 1-2i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

より $(-1-2i)v_1+v_2=0$ から

$$\boldsymbol{v}=t\begin{pmatrix}1\\ 1+2i\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0\\ 2i\end{pmatrix}\quad ({}^{\forall}t\in\mathbb{C}; t\neq 0)$$

が対応する固有ベクトルとなる. $\lambda=-i$ のとき固有ベクトルは上の固有ベクトルの共役な複素数値を考えれば

$$\boldsymbol{v}=t\begin{pmatrix}1\\ 1-2i\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}-t\begin{pmatrix}0\\ 2i\end{pmatrix}\quad ({}^{\forall}t\in\mathbb{C}; t\neq 0)$$

が対応する固有ベクトルとなる.

[5] $(2+2i)+(2-2i)=\mathrm{tr}A=1+3$ より確かに正しそう.