2024/09/18/No.1

微分方程式II・自習シート

問 1　次の関数 f の 2 階導関数 f'' と n 階導関数 $f^{(n)}$ を求めよ.

(1) $f(x) = \sqrt{1+x}$

$$f'(x) = \frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)(1+x)^{-\frac{3}{2}} \\ &= -\frac{1}{2^2}(1+x)^{-\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'''(x) &= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)(1+x)^{-\frac{5}{2}} \\ &= \frac{1}{2^3}\cdot 3(1+x)^{-\frac{5}{2}} \end{aligned}$$

よりこれを一般化して

$$f'(x) = \frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}}$$

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}\frac{1}{2^n}\Big(3\cdot 5\cdot \cdots\cdot (2n-3)\Big)(1+x)^{-\frac{2n-1}{2}} \quad (n \geq 2)$$

(2) $f(x) = e^{-x}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{-x}\times(-x)' \\ &= -e^{-x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= -(e^{-x}\times(-x)') \\ &= e^{-x} \end{aligned}$$

$$f'''(x) = -e^{-x}$$

よりこれを一般化して

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n e^{-x}$$

(3) $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= -(1-x)^{-2}\times(1-x)' \\ &= (1-x)^{-2} \end{aligned}$$

提出する場合は, 解答例を参考にして自分で採点をしておくこと. 提出しなくても試験で 60 点以上取れば合格です.

$$\begin{aligned} f''(x) &= -2(1-x)^{-3} \times (1-x)' \\ &= 2(1-x)^{-3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'''(x) &= 2(-3)(1-x)^{-4} \times (1-x)' \\ &= 2 \cdot 3(1-x)^{-4} \end{aligned}$$

よりこれを一般化して

$$f^{(n)}(x) = n!(1-x)^{-(n+1)}$$

(4) $f(x) = \log(1+x)$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} \qquad \left(= (1+x)^{-1}\right)$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= -1(1+x)^{-2} \\ &= -(1+x)^{-2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'''(x) &= -(-2)(1+x)^{-3} \\ &= 2(1+x)^{-3} \end{aligned}$$

よりこれを一般化して

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}(n-1)!\,(1+x)^{-n}$$

問 2　関数 $f(x) = \cos x$ の $2n$ 階導関数 $f^{(2n)}$ を求めよ．また関数 $g(x) = \sin x$ の $2n+1$ 階導関数 $g^{(2n+1)}$ を求めよ．

$$f(x) = \cos x$$

$$f'(x) = -\sin x$$

$n = 1$ のとき

$$f^{(2)}(x) = f''(x) = -\cos x$$

$$f'''(x) = \sin x$$

$n = 2$ のとき

$$f^{(4)}(x) = \cos x$$

よりこれを一般化して

$$f^{(2n)}(x) = (-1)^n \cos x$$

$$g(x) = \sin x$$

$$g'(x) = \cos x$$

$$g''(x) \quad = \quad -\sin x$$

$n = 1$ のとき

$$g^{(3)}(x) = g'''(x) \quad = \quad -\cos x$$

$$g^{(4)}(x) \quad = \quad \sin x$$

$n = 2$ のとき

$$g^{(5)}(x) \quad = \quad \cos x$$

よりこれを一般化して

$$g^{(2n+1)}(x) = (-1)^n \cos x$$