2023/04/27/No.3

位相入門I・自習シート

定義　X, A を集合とし $A \subset X$ とする. 議論の対象となる元が X の元であり, それを前提とするような場合には差 $X \setminus A$ のことを A^c とかき, A の**補集合**とよぶ場合がある [1], すなわち

$$A^c := \{x \in X : x \notin A\}$$

である. またこのとき, X を全体集合とよぶ.

問 1　[ド・モルガンの法則] X を全体集合とし, $A_\alpha \subset X$(ただし $\alpha \in I$) とする. 集合の定義に従って次を証明せよ (例題として, 1 か所だけは証明の例を記載しておく).

(1)

$$\left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha\right)^c = \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha^c$$

(2)

$$\left(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha\right)^c = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha^c$$

解答例　(1) ($\subset$) を示す. $x \in \left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha\right)^c$ とする. 補集合の定義より $x \in X$ かつ $x \notin \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$. よって

$$^\forall \alpha \in I, x \notin A_\alpha$$

(実際, もしそうでなければ, $^\exists \alpha_0 \in I$ s.t. $x \in A_{\alpha_0}$ となるが, その場合 $x \in \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ となり, これは矛盾.) よって, 補集合の定義より

$$x \in A_\alpha^c,$$

つまり, 共通部分の定義より

$$x \in \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha^c.$$

($\supset$) を示す...

問 2　X を全体集合とし, $A, B \subset X$, $A, B \neq \emptyset$ とする. 次の 3 条件は同値 [2]であることを示せ.

(1) $A^c \cup B = X$

(2) $A \subset B$

(3) $A \cap B^c = \emptyset$

提出する場合は, 解答例を参考にして自分で採点をしておくこと. 提出しなくても試験で 60 点以上取れば合格です.

[1] 上付きの ^{c} は補集合の英語 (complement) からきている.

[2] 「(1) ならば (2)」, 「(2) ならば (3)」, 「(3) ならば (1)」を 3 つを示せばよい.

問 3　$f : X \to Y$, $A_\alpha \subset X$, $B_\alpha \subset Y$ $(\alpha \in I)$ とする. 次を証明せよ:

(i)

$$f^{-1}\left(\bigcap_{\alpha \in I} B_\alpha\right) = \bigcap_{\alpha \in I} f^{-1}(B_\alpha)$$

(ii)

$$f\left(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha\right) \subset \bigcap_{\alpha \in I} f(A_\alpha)$$