位相入門II・自習シート

問 1　$A \subset \mathbb{R}^2$ とする．このとき $\overline{(\overline{A})} = \overline{A}$ が成立することを示せ．ただし, B が閉集合であることと $\overline{B} = B$ が成立することの同値性と, 閉包 $\overline{A}$ は閉集合であることを用いてよい．

問 2　$A \subset \mathbb{R}^2$ とする．このとき

$$\overline{A} = A^i \cup \partial A$$

であることを示せ．ただし, $\mathbb{R}^2 = A^i \cup \partial A \cup A^e$ を用いてもよい．

問 3　(X, d) を距離空間とし, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$, $x \in X$ とする．

$$\boxed{{}^\forall\varepsilon > 0,\ {}^\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \text{s.t.} \quad {}^\forall n \geq N_\varepsilon,\ d(x_n, x) < \varepsilon}$$

を満たすとき, x_n は x に (X, d) で収束するといい,

$$x_n \to x \quad (n \to +\infty)$$

または, 空間 X とそのときの距離 d を強調するために

$$x_n \to x \quad \text{in } (X, d) \quad (n \to +\infty)$$

とかく．次の問いに答えよ．

(1) $X = C([0, \pi])$, つまり区間 $[0, \pi]$ で連続な関数全体とする．また

$$d(f, g) := \max_{x\in[0,\pi]} \{|f(x) - g(x)|\}$$

とする．さらに $f_n(x) := \frac{1}{n}\sin x,\ f(x) := 0$ とすると, f_n は f に (X, d) で収束することを示せ．

(2) $X = C([0, \pi])$,

$$d_1(f, g) := \int_0^\pi |f(x) - g(x)| dx$$

とする．さらに $f_n(x) := \frac{1}{n}\sin x,\ f(x) := 0$ とすると, f_n は f に (X, d_1) で収束することを示せ．

提出する場合は, 解答例を参考にして自分で採点をしておくこと．提出しなくても試験で 60 点以上取れば合格です．