位相入門II・自習シート

問 1　数直線 $\mathbb{R}$ に距離 d として通常の距離 d_2 を考える [1], 区間 (a,b) は開集合であることを開集合の定義に従って証明せよ．ただし $a,b\in\mathbb{R}$ で $a<b$ としておく．

解答例　$U:=(a,b)$ とおく．${}^{\forall}x\in U$, ${}^{\exists}\varepsilon_x>0$ s.t.

$$N(x;\varepsilon_x)\subset U$$

を示せばよい．$x\in U$ とすると

$$a<x<b.$$

そこで, $\varepsilon_x:=\min\{b-x,x-a\}$ とおくと, $\varepsilon_x>0$ であり

$$\varepsilon_x\leq b-x,\quad \varepsilon_x\leq x-a$$

を満たす．このとき

$$N(x;\varepsilon_x)\subset U$$

が成立する．実際, ${}^{\forall}y\in N(x;\varepsilon_x)$ に対して, 近傍の定義から

$$|x-y|=d(x,y)<\varepsilon_x$$

すなわち,

$$-\varepsilon_x<x-y<\varepsilon_x,$$

$$-(b-x)\leq-\varepsilon_x<x-y,\quad \text{かつ}\quad x-y<\varepsilon\leq x-a.$$

それぞれから

$$b>y\quad\text{かつ}\quad y>a$$

が得られるので $y\in(a,b)=U$.

以上により (a,b) は $\mathbb{R}$ の開集合である (だから (a,b) のことを開区間と呼ぶ)．　□

問 2　$n\in\mathbb{N}$ とし, U_n を

$$U_n:=N\left(0;\frac{1}{n}\right)$$

とおく (すなわち原点中心, 半径 $1/n$ の円で境界は含まない集合).

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}U_n=\{0\}$$

であることを集合の等号の定義に従って証明せよ．

提出する場合は, 解答例を参考にして自分で採点をしておくこと．提出しなくても試験で 60 点以上取れば合格です．

[1] つまり $d_2(x,y)=\sqrt{(x-y)^2}=|x-y|$ を採用する．

解答例 $(\subset)$ $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$ とする. 共通部分の定義より,

$$x \in U_n = N\left(0; \frac{1}{n}\right).$$

よって, ε-近傍の定義から $d(x, 0) < 1/n$ が得られるので, 両辺 $n \to 0$ とすると

$$d(x, 0) \leq \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

つまり

$$0 \leq d(x, 0) \leq 0$$

より $d(x, 0) = 0$. 距離の定義よりこれは $x = 0$ を意味する. すなわち, $x \in \{0\}$. ゆえに

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n \subset \{0\}.$$

$(\supset)$ ${}^{\forall}x \in \{0\}$ に対して, $\{0\}$ は 1 点 0 からのみなる集合なので $x = 0$. さらに ${}^{\forall}n \in \mathbb{N}$ に対して

$$0 \in N\left(0; \frac{1}{n}\right) = U_n.$$

共通部分の定義より

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n.$$

ゆえに

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n \supset \{0\}.$$

以上より等号が成立. $\square$