2023/04/27/No.3

位相入門I・自習シート

定義　X, A を集合とし $A \subset X$ とする．議論の対象となる元が X の元であり，それを前提とするような場合には差 $X \setminus A$ のことを A^c とかき, A の**補集合**とよぶ場合がある [1]，すなわち

$$A^c := \{x \in X : x \notin A\}$$

である．またこのとき, X を全体集合とよぶ.

問 1　[ド・モルガンの法則] X を全体集合とし, $A_\alpha \subset X$(ただし $\alpha \in I$) とする．集合の定義に従って次を証明せよ (例題として, 1 か所だけは証明の例を記載しておく).

(1)

$$\left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha\right)^c = \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha^c$$

(2)

$$\left(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha\right)^c = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha^c$$

解答例　(1) ($\subset$) を示す．$x \in \left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha\right)^c$ とする．補集合の定義より $x \in X$ かつ $x \notin \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$. よって

$$^\forall \alpha \in I, x \notin A_\alpha$$

(実際, もしそうでなければ, $^\exists \alpha_0 \in I$ s.t. $x \in A_{\alpha_0}$ となるが, その場合 $x \in \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ となり, これは矛盾.) よって, 補集合の定義より

$$x \in A_\alpha^c,$$

つまり, 共通部分の定義より

$$x \in \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha^c.$$

($\supset$) を示す．$x \in \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha^c$ とする．共通部分の定義より

$$^\forall \alpha \in I, x \in A_\alpha^c, \quad \text{すなわち } x \notin A_\alpha.$$

このとき,

$$x \notin \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha.$$

(実際, もしそうでなければ, $x \in \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ より, $^\exists \alpha_0 \in I$ s.t. $x \in A_{\alpha_0}$ となるが, これは矛盾.) ゆえに補集合の定義から

$$x \in \left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha\right)^c.$$

提出する場合は, 解答例を参考にして自分で採点をしておくこと．提出しなくても試験で 60 点以上取れば合格です.

[1] 上付きの ^{c} は補集合の英語 (complement) からきている.

以上より等号成立. $\square$

(2) ($\subset$) を示す. $x \in \left(\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha\right)^c$ とする. 補集合の定義から $x \notin \bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha$. よって, ${}^\exists\alpha_0 \in I$ s.t.

$$x \notin A_{\alpha_0}.$$

(実際, もしそうでなければ, ${}^\forall\alpha \in I, x \in A_\alpha$ となるが, その場合 $x \in \bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha$ となり, これは矛盾.) ゆえに,

$$x \in A_{\alpha_0}^c$$

が得られるので

$$x \in \bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha^c.$$

($\supset$) を示す. $x \in \bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha^c$ とする. このとき, ${}^\exists\alpha_0 \in I$ s.t.

$$x \in A_{\alpha_0}^c,$$

すなわち

$$x \notin A_{\alpha_0}.$$

このとき,

$$x \notin \bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha.$$

(実際, もしそうでなければ, $x \in \bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha$ より, ${}^\forall\alpha \in I, x \in A_\alpha$ となるが, これは矛盾.) ゆえに補集合の定義から

$$x \in \left(\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha\right)^c.$$

以上より等号成立. $\square$

問 2 X を全体集合とし, $A, B \subset X$, $A, B \neq \emptyset$ とする. 次の 3 条件は同値[2)]であることを示せ.

(1) $A^c \cup B = X$

(2) $A \subset B$

(3) $A \cap B^c = \emptyset$

証明 「(1) ならば (2)」を示す. (1) を仮定する. 任意の $x \in A$ に対して, $x \in B$ を示す. $x \in A$ とする. $A \subset X$ より, $x \in X$ なので (1) を用いれば $x \in A^c \cup B$ となる. つまり $x \in A^c$ または $x \in B$. しかし, 今は $x \in A$ を仮定しているので $x \notin A^c$ より $x \in B$ しかありえない. ゆえに $A \subset B$.
「(2) ならば (3)」を示す. (2) を仮定する. 背理法で示す. もしも $A \cap B^c \neq \emptyset$ ならば, ある元 $x \in A \cap B^c$ が存在する. この元 x は $x \in A$ かつ $x \in B^c$ を満たすが, $A \subset B$ より $x \in B$ かつ $x \in B^c$ となり矛盾. よって $A \cap B^c = \emptyset$.

[2)]「(1) ならば (2)」, 「(2) ならば (3)」, 「(3) ならば (1)」を 3 つを示せばよい.

「(3) ならば (1)」を示す.
($\subset$) を示す. $x \in A^c \cup B$ とする.

(i) $x \in A^c$ のとき, $A^c = X \setminus A \subset X$ より, $x \in X$.

(ii) $x \in B$ のとき, $B \subset X$ より, $x \in X$.

以上より $x \in X$. (X は全体集合なので, つねに $x \in X$ となる.) よって $A^c \cup B \subset X$ が成立.
($\supset$) を示す. $x \in X$ とする.

(i) $x \in B$ のとき, 和集合の定義より $x \in A^c \cup B$ となる.

(ii) $x \notin B$ のとき, $x \in B^c$ であるが, さらに $x \notin A$ となる. 実際, もしそうでないならば $x \in B^c$ かつ $x \in A$ となるが, 共通部分の定義より $x \in A \cap B^c$ となり, (3) に矛盾する. ゆえに $x \in A^c$ を得るので, 和集合の定義より $x \in A^c \cup B$ となる.

いずれの場合にも $x \in A^c \cup B$ となり, $A^c \cup B \supset X$ を得る.
以上により (1) の等号が成立する.

ゆえに 3 条件は同値となる. □

「(3) ならば (1)」の別解 (3) を仮定する. ド・モルガンの法則より

$$(A \cap B^c)^c = A^c \cup B$$

であり, $\emptyset^c = X$ より (1) が成立. □

問 3 $f : X \to Y$, $A_\alpha \subset X$, $B_\alpha \subset Y$ $(\alpha \in I)$ とする. 次を証明せよ:

(i)

$$f^{-1}\left(\bigcap_{\alpha \in I} B_\alpha\right) = \bigcap_{\alpha \in I} f^{-1}(B_\alpha)$$

(ii)

$$f\left(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha\right) \subset \bigcap_{\alpha \in I} f(A_\alpha)$$

解答例 (i) ($\subset$) を示す. $x \in f^{-1}\left(\bigcap_{\alpha \in I} B_\alpha\right)$ とする. 逆像の定義より,

$$f(x) \in \bigcap_{\alpha \in I} B_\alpha,$$

すなわち, ${}^\forall \alpha \in I$, $f(x) \in B_\alpha$, つまり, $x \in f^{-1}(B_\alpha)$. ゆえに

$$x \in \bigcap_{\alpha \in I} f^{-1}(B_\alpha).$$

($\supset$) を示す. $x \in \bigcap_{\alpha \in I} f^{-1}(B_\alpha)$ とする. 共通部分の定義より ${}^\forall \alpha \in I$, $x \in f^{-1}(B_\alpha)$, つまり逆像の定義より $f(x) \in B_\alpha$. 再び共通部分の定義より

$$f(x) \in \bigcap_{\alpha \in I} B_\alpha$$

なので, 逆像の定義より

$$x \in f^{-1}\left(\bigcap_{\alpha \in I} B_\alpha\right).$$

以上より等号成立. $\square$

(ii) $y \in f\left(\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha\right)$ とする. 像の定義より ${}^{\exists}x \in \bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha$ s.t. $y = f(x)$ だが, x について ${}^{\forall}\alpha \in I$, $x \in A_\alpha$ がいえる. よって像の定義より

$$y \in f(A_\alpha)$$

が得られるが, この $\alpha \in I$ は任意なので

$$y \in \bigcap_{\alpha \in I} f(A_\alpha).$$

注: (ii) の逆向きの包含関係は成立しない.