位相入門I・自習シート

問 1　A_α, B を集合とする. ただし, $\alpha \in I$ とし I は添え字集合である. 次を証明せよ:

$$B \cup \left(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \right) = \bigcap_{\alpha \in I} (B \cup A_\alpha).$$

解答例　($\subset$) $^\forall x \in B \cup \left(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \right)$ に対して, $x \in B$ または $x \in \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$.
(i) $x \in B$ のとき, $^\forall \alpha \in I$, $x \in B \cup A_\alpha$. 共通部分の定義より

$$x \in \bigcap_{\alpha \in I} (B \cup A_\alpha).$$

(ii) $x \in \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$ のとき, $^\forall \alpha \in I$, $x \in A_\alpha$, つまり $x \in B \cup A_\alpha$. 共通部分の定義より

$$x \in \bigcap_{\alpha \in I} (B \cup A_\alpha).$$

(i), (ii) より

$$x \in \bigcap_{\alpha \in I} (B \cup A_\alpha).$$

よって

$$B \cup \left(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \right) \subset \bigcap_{\alpha \in I} (B \cup A_\alpha)$$

が成立.
($\supset$) $^\forall x \in \bigcap_{\alpha \in I} (B \cup A_\alpha)$ に対して, 共通部分の定義より, $^\forall \alpha \in I$, $x \in B \cup A_\alpha$.
(i) $x \in B$ のとき, $x \in B \cup \left(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \right)$.
(ii) $x \notin B$ のとき, $^\forall \alpha \in I$, $x \in A_\alpha$. (実際, もしそうでないなら, $^\exists \alpha_0 \in I$ s.t. $x \notin A_{\alpha_0}$ となるが, そのとき $x \notin B \cap A_{\alpha_0}$ となり, 仮定に矛盾.) よって $x \in \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$. すなわち

$$x \in B \cup \left(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \right).$$

(i), (ii) より

$$x \in B \cup \left(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \right).$$

よって

$$B \cup \left(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \right) \supset \bigcap_{\alpha \in I} (B \cup A_\alpha)$$

が成立.

以上より

$$B \cup \left(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \right) = \bigcap_{\alpha \in I} (B \cup A_\alpha).$$

□

提出する場合は, 解答例を参考にして自分で採点をしておくこと. 提出しなくても試験で 60 点以上取れば合格です.

問 2　a, b, c, d, e の 5 つの文字からなる次の集合を考える.

$$A_1 := \{a, b, c\}, \quad A_2 := \{a, b, d\}, \quad A_3 := \{a, b, d, e\}$$

(1) $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ について, その元をすべて列挙すれば

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \{a, b, c, d, e\}$$

となる. 同じように全ての元を列挙する方法で $A_1 \cap A_2 \cap A_3$ を求めよ.

$$A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \{a, b\}$$

(2) $I := \{1, 2, 3\}$ とおくことで $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ は

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$$

とかくこともできる. 例を参考に, $x = b,\ c,\ d,\ e$ に対して,

$$x \in A_{\alpha_0}$$

となる $\alpha_0 \in I$ をそれぞれ**全て**求めよ.

(例) $x = a$ のとき, a は $A_1,\ A_2,\ A_3$ のどの集合にも属しているので $x \in A_{\alpha_0}$ となる α_0 は $\alpha_0 = 1, 2, 3$ の 3 つである.

(i) $x = b$ のとき, $x \in A_{\alpha_0}$ となる $\alpha_0 \in I$ は $\alpha_0 = 1, 2, 3$

(ii) $x = c$ のとき, $x \in A_{\alpha_0}$ となる $\alpha_0 \in I$ は $\alpha_0 = 1$

(iii) $x = d$ のとき, $x \in A_{\alpha_0}$ となる $\alpha_0 \in I$ は $\alpha_0 = 2, 3$

(iv) $x = e$ のとき, $x \in A_{\alpha_0}$ となる $\alpha_0 \in I$ は $\alpha_0 = 3$

問 3　次の否定を述べよ.
(例) 「彼はすべての都道府県を旅した.」

否定　「ある都道府県があって, 彼はその都道府県を旅していない.」
「全ての都道府県を旅していない.」は言い過ぎ.

(1) 「ある年があって, 数理の人数が 100 人を超えた.」

否定　「どの年も数理の人数は 100 人を超えていない.」
「ある年があって, 数理の人数が 100 人を超えていない.」では足りない.

(2) 「ある講義があって, その講義は龍大のすべての学生が受講している.」

否定　「どのような講義に対しても, ある龍大生がいて, その講義を受講していない.」

(3) 「位相入門を受講しているすべての学生に対してある B リーグのチームがあって, その学生はそのチームが好きだ.」

否定　「位相入門を受講しているある学生がいて, どのBリーグのチームもその学生は好きではない.」

問 4　実数の集合を $\mathbb{R}$ とかく. $E \subset \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$ とする. 次の命題の否定を記号で書け.

(1) $a \in \mathbb{R} \setminus E$.

(2) ${}^\forall x \in E,\ x \leq a$.

(3) ${}^\exists x_1 \in E$ s.t. $x_1 \geq b$.

(4) ${}^\exists K \in \mathbb{R}$ s.t. ${}^\forall x \in E,\ x \leq K$.

解答例　(1) 「$a \in \mathbb{R}$ かつ $a \notin E$」の否定なので「$a \notin \mathbb{R}$ または $a \in E$」となるが $a \in \mathbb{R}$ は仮定されているので

$$a \in E.$$

(2) 「任意の $x \in E$ に対して $x \leq a$」の否定なので, 「ある $x_0 \in E$ が存在して, 反例となる. 」つまり

$${}^\exists x_0 \in E \quad \text{s.t.} \quad x_0 > a.$$

(3) 「 ある $x_1 \in E$ が存在して $x_1 \geq b$」の否定なので, 「任意の $x \in E$ に対して $x \geq b$ を満たさないということ」, つまり

$${}^\forall x \in E,\ x < b.$$

英語の文章の流れにあわせて

$$x < b\ ({}^\forall x \in E) \qquad (x < b \text{ for all } x \in E \text{ のこと})$$

と書いてもよい.

(4) 「ある $K \in \mathbb{R}$ が存在して, 任意の $x \in E$ に対して $x \leq K$」の否定なので「任意の $K \in \mathbb{R}$ に対して, 『任意の $x \in E$ に対して $x \leq K$』の部分が否定される」. つまり, 「任意の $K \in \mathbb{R}$ に対してある $x_K \in E$ が存在して $x_K > K$」ということなので

$${}^\forall K \in \mathbb{R}, {}^\exists x_K \in E \quad \text{s.t. } x_K > K.$$

注　(5) のように論理記号が複数ある場合の否定を求めるには,

$$\boxed{\exists K \in \mathbb{R}\ \boxed{\forall x \in E\ \boxed{x \leq K}}}$$

と本質だけ抽出してその否定,

$$\neg\ \boxed{\exists K \in \mathbb{R}\ \boxed{\forall x \in E\ \boxed{x \leq K}}}$$

を

$$\boxed{\forall K \in \mathbb{R}\ \boxed{\exists x_K \in E\ \boxed{x_K > K}}}$$

と論理記号の入れかえと最後の命題の否定によって求め, 必要に応じてあらためて ${}^\forall K \in \mathbb{R}$, ${}^\exists x_K \in E$ s.t. $x_K > K$ と否定を機械的に得ることもできる.