2023/07/27/No.7

位相入門II・自習シート

問 1　$A \subset \mathbb{R}^2$ とする．このとき $\overline{(\overline{A})} = \overline{A}$ が成立することを示せ．ただし, B が閉集合であることと $\overline{B} = B$ が成立することの同値性と, 閉包 $\overline{A}$ は閉集合であることを用いてよい．

証明　閉包 $\overline{A}$ は閉集合である．よって B として $\overline{A}$ を選んで閉集合の同値性を用いれば $\overline{(\overline{A})} = \overline{A}$ が成立する．　□

問 2　$A \subset \mathbb{R}^2$ とする．このとき

$$\overline{A} = A^i \cup \partial A$$

であることを示せ．ただし, $\mathbb{R}^2 = A^i \cup \partial A \cup A^e$ を用いてもよい．

証明　($\subset$) について, $x \in \overline{A}$ とすると, 閉包の定義より点 x は A の触点であるので

$$^\forall\varepsilon > 0,\ N(x;\varepsilon) \cap A \neq \emptyset.$$

つまり $x \notin A^e$ が言える (自習シート問 3 の (2))．よって $\mathbb{R}^2 = A^i \cup \partial A \cup A^e$ であったので,

$$x \in A^i \cup \partial A.$$

($\supset$) について, $x \in A^i \cup \partial A$ とすると, $x \in A^i$ または $x \in \partial A$ で場合分けできる．

(i) $x \in A^i$ のとき, 内部の定義より $A^i \subset A$ なので $x \in A$ となり, $x \in \overline{A}$.

(ii) $x \in \partial A$ のとき, 境界の定義より, 点 x は A の境界点であるので, $^\forall\varepsilon > 0,\ N(x;\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ かつ $N(x;\varepsilon) \cap A^c \neq \emptyset$ を満たす．よってその片方である $N(x;\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ を満たすので, これは点 x が A の触点であることを意味する．よって $x \in \overline{A}$.

以上より, 等号が成立．　□

問 3　(X, d) を距離空間とし, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$, $x \in X$ とする．

$$^\forall\varepsilon > 0,\ ^\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \text{s.t.} \quad ^\forall n \geq N_\varepsilon,\ d(x_n, x) < \varepsilon$$

を満たすとき, x_n は x に (X, d) で収束するといい,

$$x_n \to x \quad (n \to +\infty)$$

または, <u>空間 X とそのときの距離 d を強調するために</u>

$$x_n \to x \quad \text{in } (X, d) \quad (n \to +\infty)$$

とかく．次の問いに答えよ．

(1) $X = C([0, \pi])$, つまり区間 $[0, \pi]$ で連続な関数全体とする．また

$$d(f, g) := \max_{x\in[0,\pi]} \{|f(x) - g(x)|\}$$

とする．さらに $f_n(x) := \frac{1}{n}\sin x$, $f(x) := 0$ とすると, f_n は f に (X, d) で収束することを示せ．

提出する場合は, 解答例を参考にして自分で採点をしておくこと．提出しなくても試験で 60 点以上取れば合格です．

解答例　$\varepsilon > 0$ とする.

$$
\begin{aligned}
d(f_n, f) &= \max_{x\in[0,\pi]}\{|\frac{1}{n}\sin x - 0|\} \\
&= \max_{x\in[0,\pi]}\{\frac{1}{n}\sin x\} \\
&= \frac{1}{n}\sin\frac{\pi}{2} \\
&= \frac{1}{n}.
\end{aligned}
$$

よって, ${}^{\exists}N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ s.t.

$$N_\varepsilon > \frac{1}{\varepsilon}$$

より, ${}^{\forall}n \geq N_\varepsilon$ に対して

$$
\begin{aligned}
d(f_n, f) &= \frac{1}{n} \\
&\leq \frac{1}{N_\varepsilon} \\
&< \varepsilon.
\end{aligned}
$$

(2) $X = C([0,\pi])$,

$$d_1(f,g) := \int_0^\pi |f(x) - g(x)|dx$$

とする. さらに $f_n(x) := \frac{1}{n}\sin x$, $f(x) := 0$ とすると, f_n は f に (X, d_1) で収束することを示せ.

解答例　$\varepsilon > 0$ とする.

$$
\begin{aligned}
d_1(f_n, f) &= \int_0^\pi |\frac{1}{n}\sin x - 0|dx \\
&= \frac{1}{n}\int_0^\pi \sin x dx \\
&= \frac{1}{n}[-\cos x]_0^\pi \\
&= \frac{2}{n}.
\end{aligned}
$$

よって, ${}^{\exists}N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ s.t.

$$N_\varepsilon > \frac{2}{\varepsilon}$$

より, ${}^{\forall}n \geq N_\varepsilon$ に対して

$$
\begin{aligned}
d_1(f_n, f) &= \frac{2}{n} \\
&\leq \frac{2}{N_\varepsilon} \\
&< \varepsilon.
\end{aligned}
$$