位相入門II・自習シート

問 1　次の集合 A, B についてそれぞれ, 内部, 外部, 境界, 閉包がどのような集合になるか求めよ. 証明する必要はない.

$$A = (0,1] = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x \leq 1\}, \quad B = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R} : 0 < x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$$

$$A^i = (0,1), \quad A^e = (-\infty, 0) \cup (1, \infty), \quad \partial A = \{0, 1\}, \quad \overline{A} = [0,1].$$

$$B^i = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R} : 0 < x_1^2 + x_2^2 < 1\},$$

$$B^e = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R} : x_1^2 + x_2^2 > 1\},$$

$$\partial B = \{0\} \cup \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R} : x_1^2 + x_2^2 = 1\},$$

$$\overline{B} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R} : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}.$$

問 2　$A \subset \mathbb{R}^2$, $x \in \mathbb{R}^2$ とする. 次の問いに答えよ.

(1) 次の命題「$x \notin A^e$ ならば ${}^\forall \varepsilon > 0$, $N(x;\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$」の対偶を論理記号で書け.

(2) 命題「$x \notin A^e$ ならば ${}^\forall \varepsilon > 0$, $N(x;\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ 」を証明せよ.

(3) $(A^e)^c \subset \overline{A}$ を証明せよ.

解答例　(1) 「P ならば Q」の対偶は「Q でないならば P でない」である. よって「$x \notin A^e$ ならば ${}^\forall \varepsilon > 0$, $N(x;\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$」の対偶は「${}^\exists \varepsilon_x > 0$ s.t. $N(x;\varepsilon_x) \cap A = \emptyset$ ならば $x \in A^e$」となる.
(2) 対偶を示す. すなわち「${}^\exists \varepsilon_x > 0$ s.t. $N(x;\varepsilon_x) \cap A = \emptyset$ ならば $x \in A^e$」を示せばよい. ${}^\exists \varepsilon_x > 0$ s.t.

$$N(x;\varepsilon_x) \cap A = \emptyset$$

とする. このとき, $N(x;\varepsilon_x) \subset A^c$ である. 実際, $y \in N(x;\varepsilon_x)$ とすると, $y \notin A$ でなくてはならない. なぜならば $y \in A$ だとすると

$$y \in N(x;\varepsilon_x) \cap A$$

となり空集合であることに矛盾するからである. よって, $y \in A^c$ となり

$$N(x;\varepsilon_x) \subset A^c$$

が示された. よって x が A の外点となり, $x \in A^e$ が得られる. 対偶が真なので命題も真. □
(3) $y \in (A^e)^c$ とすると $y \notin A^e$. よって (2) より ${}^\forall \varepsilon > 0$, $N(y;\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$. これは y が A の触点であることの定義なので, $y \in \overline{A}$ を得る. 以上より $(A^e)^c \subset \overline{A}$ が成立. □

問 3　$A, B \subset \mathbb{R}^2$ とする. $A \subset B$ ならば, $\overline{A} \subset \overline{B}$ を証明せよ.

提出する場合は, 解答例を参考にして自分で採点をしておくこと. 提出しなくても試験で 60 点以上取れば合格です.

証明　$x \in \overline{A}$ とする. 閉包の定義より点 x は A の触点なので, ${}^{\forall}\varepsilon > 0,\ N(x;\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$. ここで, 仮定 $A \subset B$ より

$$N(x;\varepsilon) \cap A \subset N(x;\varepsilon) \cap B$$

よって, $N(x;\varepsilon) \cap B \neq \emptyset$ である. 実際, 少なくとも 1 つは $y \in N(x;\varepsilon) \cap A$ がとれるから $y \in N(x;\varepsilon) \cap B$ となるためである. よって x は B の触点であることが示せたので, $x \in \overline{B}$. ゆえに $\overline{A} \subset \overline{B}$ が成立. $\square$