位相入門II・自習シート

問 1　$A, B \subset \mathbb{R}^2$ とする．次を証明せよ．

$$(A \cap B)^i = A^i \cap B^i.$$

証明　($\subset$) について, $x \in (A\cap B)^i$ とする．内部の定義より点 x は $A\cap B$ の内点である．よって $^\exists\varepsilon_x > 0$ s.t.

$$N(x; \varepsilon_x) \subset A \cap B.$$

つまり,

$$N(x; \varepsilon_x) \subset A, \quad \text{かつ} \quad N(x; \varepsilon_x) \subset B$$

といえる．これは点 x が A の内点かつ B の内点であることを意味するので $x \in A^i$ かつ $x \in B^i$ となり,

$$x \in A^i \cap B^i.$$

($\supset$) について, $x \in A^i \cap B^i$ とすると, 共通部分の定義より $x \in A^i$ かつ $x \in B^i$．内部の定義より点 x は A の内点かつ B の内点であるので $^\exists\varepsilon_A, \varepsilon_B > 0$ s.t.

$$N(x; \varepsilon_A) \subset A \quad \text{かつ} \quad N(x; \varepsilon_B) \subset B.$$

そこで, $\varepsilon_x := \min\{\varepsilon_A, \varepsilon_B\}$ とおくと, $\varepsilon_x > 0$ であり

$$N(x; \varepsilon_x) \subset A \quad \text{かつ} \quad N(x; \varepsilon_x) \subset B$$

となり,

$$N(x; \varepsilon_x) \subset A \cap B.$$

これは点 x が $A \cap B$ の内点であることを意味するので,

$$x \in (A \cap B)^i.$$

以上より等号が成立．　□

問 2　[定理 4.11 の予習] $A \subset \mathbb{R}^2$ とする．A の内部 A^i は A に含まれる最大の開集合であることを証明せよ．

解答例　$B \subset A$ を $\mathbb{R}^2$ の開集合とする．このとき, $B \subset A^i$ を示すことで, A^i が A に含まれる開集合の中で最大の開集合であることを示す．$x \in B$ とする．B は開集合なので $^\exists\varepsilon_x > 0$ s.t.

$$N(x; \varepsilon_x) \subset B.$$

ここで, $B \subset A$ なので,

$$N(x; \varepsilon_x) \subset A$$

といえる．つまり, x は A の内点である．よって, $x \in A^i$．つまり, $B \subset A^i$．まとめると, A に含まれるどのような開集合 B をえらんできても, $B \subset A^i$ となるので, A^i が開集合であることから, A^i は A に含まれる最大の開集合といえる．　□

提出する場合は, 解答例を参考にして自分で採点をしておくこと．提出しなくても試験で 60 点以上取れば合格です．

問 3　$A \subset \mathbb{R}^2$, $x \in \mathbb{R}^2$ とする．次の問いに答えよ．

(1) 次の命題「${}^{\forall}\varepsilon > 0$, $N(x;\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ ならば $x \notin A^e$」の対偶を論理記号で書け．

(2) 命題「${}^{\forall}\varepsilon > 0$, $N(x;\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ ならば $x \notin A^e$」を証明せよ．

解答例　(1)「P ならば Q」の対偶は「Q でないならば P でない」である．よって「${}^{\forall}\varepsilon > 0$, $N(x;\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ ならば $x \notin A^e$」の対偶は「$x \in A^e$ ならば ${}^{\exists}\varepsilon_x > 0$ s.t. $N(x;\varepsilon_x) \cap A = \emptyset$」となる．

(2) 対偶を示す．すなわち「$x \in A^e$ ならば ${}^{\exists}\varepsilon_x > 0$ s.t. $N(x;\varepsilon_x) \cap A = \emptyset$」を示せばよい．$x \in A^e$ とすると外部の定義より，点 x は A の外点なので ${}^{\exists}\varepsilon_0 > 0$ s.t. $N(x;\varepsilon_0) \subset A^c$．よって，$N(x;\varepsilon_0) \cap A = \emptyset$．