位相入門II・自習シート

問 1[講義の定理 4.9 の予習]　$A \subset \mathbb{R}^2$ とする．$A^i = A$ を満たすならば A は $\mathbb{R}^2$ の開集合であることを証明せよ．

解答例　$A^i = A$ を仮定する．A が開集合であることを示すには ${}^\forall x \in A$, ${}^\exists \varepsilon_x > 0$ s.t.

$$N(x;\varepsilon_x) \subset A$$

を示せばよいが, $x \in A$ とすると $A = A^i$ より x は A の内点となる．内点の定義より ${}^\exists \varepsilon_x > 0$ s.t.

$$N(x;\varepsilon_x) \subset A$$

が成立する．よって, A は $\mathbb{R}^2$ の開集合である．　□

問 2　$a, b \in \mathbb{R}^2$ とし, $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ は

$$N(a;\varepsilon_1) \cap N(b;\varepsilon_2) \neq \emptyset$$

となるような数とする．このとき, $N(a;\varepsilon_1) \cap N(b;\varepsilon_2)$ は円とは限らないが $c \in N(a;\varepsilon_1) \cap N(b;\varepsilon_2)$ ならば

$$N(c;\varepsilon_c) \subset N(a;\varepsilon_1) \cap N(b;\varepsilon_2)$$

となる半径 ε_c が存在することを証明せよ．

解答例　$N(a;\varepsilon_1)$ と $N(b;\varepsilon_2)$ は開集合で, その共通部分 $N(a;\varepsilon_1) \cap N(b;\varepsilon_2)$ も開集合である．よって, 開集合の定義より $c \in N(a;\varepsilon_1) \cap N(b;\varepsilon_2)$ に対して ${}^\exists \varepsilon_c > 0$ s.t.

$$N(c;\varepsilon_c) \subset N(a;\varepsilon_1) \cap N(b;\varepsilon_2)$$

となる．　□

問 3　$a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{R}$ とし, $a_1 < b_1$, $a_2 < b_2$ を仮定する．開長方形 $(a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \subset \mathbb{R}^2$ は開集合であることを証明せよ．なお, 開長方形とは

$$(a_1, b_1) \times (a_2, b_2) := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : a_1 < x_1 < b_1, a_2 < x_2 < b_2\}$$

で定義される．

提出する場合は, 解答例を参考にして自分で採点をしておくこと．提出しなくても試験で 60 点以上取れば合格です．

解答例　$U := (a_1, b_1) \times (a_2, b_2)$ とおく. ${}^\forall x \in U$, $\varepsilon_x > 0$ s.t.

$$N(x; \varepsilon) \subset U$$

を示せばよい. $x \in U$ とすると

$$a_1 < x_1 < b_1, a_2 < x_2 < b_2$$

そこで,

$$\varepsilon_x := \min\{x_1 - a_1, b_1 - x_1, x_2 - a_2, b_2 - x_2\}$$

とおく. このとき $N(x; \varepsilon) \subset U$ が成立する. 実際, ${}^\forall y \in N(x; \varepsilon_x)$ に対して,

$$d(y, x) < \varepsilon_x$$

より

$$\begin{aligned}
x_1 - y_1 \leq |x_1 - y_1| \leq d(y, x) < \varepsilon_x \leq x_1 - a_1, \\
y_1 - x_1 \leq |y_1 - x_1| \leq d(y, x) < \varepsilon_x \leq b_1 - x_1, \\
x_2 - y_2 \leq |x_2 - y_2| \leq d(y, x) < \varepsilon_x \leq x_2 - a_2, \\
y_2 - x_2 \leq |y_2 - x_2| \leq d(y, x) < \varepsilon_x \leq b_2 - x_2
\end{aligned}$$

が成立する. よって,

$$a_1 < y_1 < b_1, \quad a_2 < y_2 < b_2.$$

つまり $y = (y_1, y_2) \in U$. 以上より開長方形 $(a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \subset \mathbb{R}^2$ は開集合. $\square$