微分方程式II・自習シート

問 1

$$A=\begin{pmatrix}0&1\\-2&3\end{pmatrix}$$

とする.

(1) A の固有値と固有ベクトルを求め, さらに e^{tA} を求めよ.

(2) (1) を用いて次の連立微分方程式

$$\begin{cases}x'=y\\y'=-2x+3y\end{cases}$$

を初期条件 $(x(0),y(0))=(1,0)$ とともに解け.

問 2　A を n 次正方行列とし, $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ を A の固有値とする. ただし, 固有値が重複する場合にはその分だけ分けておき固有値の個数を n 個になるようにしておく. このとき次が成立することを, $n=2$ のときを参考にして $n=3$ のときを証明せよ:

(i) $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\cdots+\lambda_n=a_{11}+a_{22}+a_{33}+\cdots+a_{nn}$　($=\mathrm{tr}A$ とかき A のトレースと呼ぶ);

(ii) $\lambda_1\times\lambda_2\times\lambda_3\cdots\times\lambda_n=\mathrm{detA}$　$(=|A|)$.

参考にする証明の例　$n=2$ のとき. 固有値を求める方程式は

$$A-\lambda I=\begin{pmatrix}a_{11}-\lambda & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}-\lambda\end{pmatrix}$$

より

$$\begin{aligned}\det(A-\lambda I)&=(a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda)-a_{12}a_{21}\\&=\lambda^2-(a_{11}+a_{22})\lambda+a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\\&=\lambda^2-\mathrm{tr}A\lambda+\mathrm{det}A\end{aligned}\tag{1}$$

である. そこで, この式を

$$g(\lambda):=\det(A-\lambda I)$$

(これを固有多項式とよび $g(\lambda)=0$ を固有方程式とよんだりする) と定義し, λ_1,λ_2 を A の固有値とすれば固有値の定義から

$$g(\lambda_1)=0,\quad g(\lambda_2)=0$$

を満たす. よって, $g(\lambda)$ は λ の 2 次式で λ^2 の係数は 1 なので

$$g(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)=\lambda^2-(\lambda_1+\lambda_2)\lambda+\lambda_1\lambda_2\tag{2}$$

提出する場合は, 解答例を参考にして自分で採点をしておくこと. 提出しなくても試験で 60 点以上取れば合格です.

の形をしていることが分かる．(1) と (2) の **2 番目の項の係数**と**最後の項の係数**を比較すると，

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \mathrm{tr}A, \quad \lambda_1\lambda_2 = \mathrm{detA}$$

を得る．