微分方程式II・自習シート

問 1　次のような 3 階の定数係数線形常微分方程式を考える:

$$x''' - 2x'' - x' + 2x = 0 \tag{1}$$

x' を x_1, x'' を x_2 とおくと

$$x_2' - 2x_2 - x_1 + 2x = 0$$

に直せるので, 上記の微分方程式は無理矢理, **次の 1 階の連立微分方程式**に書き直すことができる:(つまり未知数を x のほかに x_1, x_2 と増やした代わりに微分の階数は 1 階だけに書き換える)

$$\begin{cases} x' = x_1 & = 0x + 1x_1 + 0x_2, \\ x_1' = x_2 & = 0x + 0x_1 + 1x_2, \\ x_2' = 2x_2 + x_1 - 2x & = -2x + 1x_1 + 2x_2 \end{cases}$$

よって微分方程式 (1) は

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}'(t) = A\boldsymbol{x}(t) \tag{2}$$

と同値である. ただし,

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

が未知ベクトル[1)]と行列 A となる. つまり初期条件 $\boldsymbol{x}_0$ を与えれば

$$\boldsymbol{x}(t) = e^{tA}\boldsymbol{x}_0$$

で解は求められる.

次の微分方程式を (2) の形で見るためのベクトル $\boldsymbol{x}$ と行列 A をそれぞれ求めよ.

(1) $x'' + 3x' + 2x = 0$

(2) $x'' + 9x = 0$

(3) $x''' - 4x'' + 5x' - 2x = 0$

(4) $x^{(4)} + 2x'' + x = 0$

提出する場合は, 解答例を参考にして自分で採点をしておくこと. 提出しなくても試験で 60 点以上取れば合格です.

[1)] x と $x(t)$ の違いは特に意識しなくていいが, (2) の上も $x(t)$ のように t をつけると長くなるので省略した. 正しくはすべて $x(t)$ と t の関数だと分かるように書くべき.

問 2　次の行列に対して固有値と固有ベクトルを求め, 対角化のための P を求めよ[2].

(1)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

(2)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

---

[2] $P^{-1}AP$ が対角行列となるための正則行列 P のこと.