微分方程式II・自習シート

問 1　$x := x(t)$ とし, $a \in \mathbb{R}; a \neq 0$ する．求積法によって

$$\frac{dx}{dt} = ax$$

の一般解 (任意定数 C を含む形の解) を求めよ．また, $t = 0$ における初期条件を追加し

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

の特解 (初期条件から一般解の任意定数 C を 1 つに定める) を求めよ.

問 2　$x := x(t), y := y(t)$ とする．次の連立微分方程式の一般解を次の手順に従って求めよ.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2x + 2y \\ \dfrac{dy}{dt} = -x - 5y \end{cases}$$

簡単のため $dx/dt = x'$, $dy/dt = y'$ のように表記する.

(1) 2 つめの式 $x = -y' - 5y$ とそれを微分した式

$$x' = -y'' - 5y'$$

を用意する．これらを 1 つめの式に代入することで y だけの微分方程式

$$y'' + 7y' + 12 = 0$$

が得られることを確かめよ.

(2) (1) で得られた微分方程式を解いて一般解 y を求めよ.

(3) (2) で得られた y を用いて x を求めよ.

問 3　2 次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

を考える．フロベニウスノルム

$$\|A\| := \sqrt{\sum_{i,j=1}^{2} |a_{ij}|^2} = \sqrt{|a_{11}|^2 + |a_{12}|^2 + |a_{21}|^2 + |a_{22}|^2}$$

を思い出し, $\|A\|$ と $\|I\|$ の値をそれぞれ求め, この場合 $\|AI\| = \|A\|\|I\|$ は成立しないことを確かめよ.

提出する場合は, 解答例を参考にして自分で採点をしておくこと．提出しなくても試験で 60 点以上取れば合格です.

問 4　n 次正方行列を考える．行列のノルムとして講義で用いたフロベニウスノルムとは異なる次のノルムを考える:

$$\|A\|_1 := \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}| = |a_{11}| + |a_{12}| + \cdots + |a_{nn}|.$$

このとき次の問いに答えよ．

(1) 次の行列 A, B, I に対して $\|A\|_1$, $\|B\|_1$, $\|I\|_1$ の値をそれぞれ求めよ [1]．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 10 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(2) 任意の n 次正方行列 A と任意の実数 $t \in \mathbb{R}$ に対して

$$\|tA\|_1 = |t|\|A\|_1$$

が成立することを証明せよ．

(3) 任意の n 次正方行列 A, B に対して次の劣加法性 (三角不等式) が成立することを証明せよ．

$$\|A + B\|_1 \leq \|A\|_1 + \|B\|_1.$$

(4) 任意の n 次正方行列 A, B に対して次の劣乗法性が成立することを証明せよ [2]．

$$\|AB\|_1 \leq \|A\|_1 \|B\|_1.$$

---

[1] もう [ ] ではなく ( ) を使うことにする．

[2] ただし, 次の不等式を用いてもよい:

$$\sum_{k=1}^{2} |a_k||b_k| = |a_1||b_1| + |a_2||b_2|,$$

$$\left(\sum_{k=1}^{2} |a_k|\right)\left(\sum_{\ell=1}^{2} |b_\ell|\right) = |a_1||b_1| + |a_2||b_1| + |a_1||b_2| + |a_2||b_2|,$$

$$\sum_{k=1}^{2} |a_k||b_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{2} |a_k|\right)\left(\sum_{\ell=1}^{2} |b_\ell|\right)$$

を一般化して

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} |a_{ik}|\right)\left(\sum_{j=1}^{n} |b_{kj}|\right) \leq \left(\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} |a_{ik}|\right)\left(\sum_{\ell=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |b_{lj}|\right)$$