2023/10/12/No.5

微分方程式II・自習シート

問 1　$a, b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ とすると次の二項定理が成立する:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k a^{n-k} b^k = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k a^k b^{n-k}$$

ただし,

$${}_n\mathrm{C}_k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

次の問いに答えよ

(1) $(x+1)^{10}$ を展開したときの x^9, x^4 の係数をそれぞれ求めよ.

(2) $\left(2x - \dfrac{1}{x}\right)^6$ を展開したときの x^4, $\frac{1}{x^2}$ の係数をそれぞれ求めよ.

問 2　A, B を m 次正方行列とし, $AB = BA$ を満たすとする. このとき $(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2 = A^2 + 2AB + B^2$ に注意すると次の二項定理が成立する:

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k A^{n-k} B^k = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k A^k B^{n-k}$$

$N \in \mathbb{N}$ とする. 次の問いに答えよ.

(1)

$$I + (A+B) + \frac{1}{2!}(A+B)^2$$

を展開して A の昇べきの順に書き直すと

$$\begin{aligned} I + (A+B) + \frac{1}{2!}(A+B)^2 &= I + (A+B) + \frac{1}{2!}(A^2 + 2AB + B^2) \\ &= \left(I + B + \frac{1}{2!}B^2\right) + A(I+B) + \frac{1}{2!}A^2 \end{aligned}$$

となる. これに従い,

$$I + (A+B) + \frac{1}{2!}(A+B)^2 + \frac{1}{3!}(A+B)^3$$

や

$$I + (A+B) + \frac{1}{2!}(A+B)^2 + \frac{1}{3!}(A+B)^3 + \cdots + \frac{1}{N!}(A+B)^N$$

を昇べきの順に書き直せ.

提出する場合は, 解答例を参考にして自分で採点をしておくこと. 提出しなくても試験で 60 点以上取れば合格です.

(2) 行列 e^A を

$$e^A := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k = I + A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \cdots + \frac{1}{N!}A^N + \cdots$$

で定義する. 級数の項の入れ替えを認めて

$$e^{A+B} = e^A e^B$$

を確かめよ.