微分方程式II・自習シート

問 1　A を $n \times n$ 行列とする．以後, 行列を

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

とかくことにする．行列 A の数値化として

$$\|A\| := \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2}$$

を定義する (A のフロベニウスノルムと呼ぶことがある)．このとき次の問いに答えよ．

(1) 次の行列 A, B, I に対して $\|A\|$, $\|B\|$, $\|I\|$ の値をそれぞれ求めよ．

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 10 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(2) 任意の $n \times n$ 行列 A と任意の実数 $t \in \mathbb{R}$ に対して

$$\|tA\| = |t|\|A\|$$

が成立することを証明せよ．書き始めは以下を参考にせよ．

解答例

$$\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= \|tA\| \\
&= \left\| t \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & & a_{nn} \end{bmatrix} \right\| \\
&= \left\| \begin{bmatrix} ta_{11} & ta_{12} & \cdots & ta_{1n} \\ ta_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ ta_{n1} & \cdots & & ta_{nn} \end{bmatrix} \right\| \\
&= \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} |ta_{ij}|^2} \\
&= \cdots
\end{aligned}$$

提出する場合は, 解答例を参考にして自分で採点をしておくこと．提出しなくても試験で 60 点以上取れば合格です．

(3) 任意の $n \times n$ 行列 A, B に対して次の劣加法性 (三角不等式) が成立することを証明せよ.

$$\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$$

ただし, シュワルツの不等式 [1]を用いてもよい. 書き始めは以下を参考にせよ.

解答例 $\|A+B\|^2 \leq (\|A\| + \|B\|)^2$ を示す.

$$\begin{aligned}
(\text{左辺})^2 &= \|A+B\|^2 \\
&= \left\| \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & & a_{nn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & & b_{nn} \end{bmatrix} \right\|^2 \\
&= \left\| \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1}+b_{n1} & \cdots & & a_{nn}+b_{nn} \end{bmatrix} \right\|^2 \\
&= \cdots
\end{aligned}$$

(4) 任意の $n \times n$ 行列 A, B に対して次の劣乗法性が成立することを証明せよ.

$$\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$$

ただし, シュワルツの不等式を用いてもよい.

---

[1]

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}b_{ij} \leq \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \text{もしくは} \quad \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}b_{ij}\right)^2 \leq \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2\right)\left(\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}^2\right)$$