微分方程式 II・自習シート

問 1　$\boldsymbol{x}(t) :={}^{\mathsf{T}}(x(t), y(t))$ を未知関数とし, 次の微分方程式を考える.

$$\boldsymbol{x}'(t) = A\boldsymbol{x}(t)$$

ここで, A を次のような対角行列とする. ただし, $\lambda_+, \lambda_- \in \mathbb{R}$ で, $\lambda_+ > \lambda_1$ とする.

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_+ & 0 \\ 0 & \lambda_- \end{pmatrix}$$

(1) e^{tA} を計算せよ. また e^{tA} を用いて, 微分方程式の一般解が定数 C_1, C_2 を用いて

$$x(t) = C_1 e^{\lambda_+ t}, \quad y(t) = C_2 e^{\lambda_- t}$$

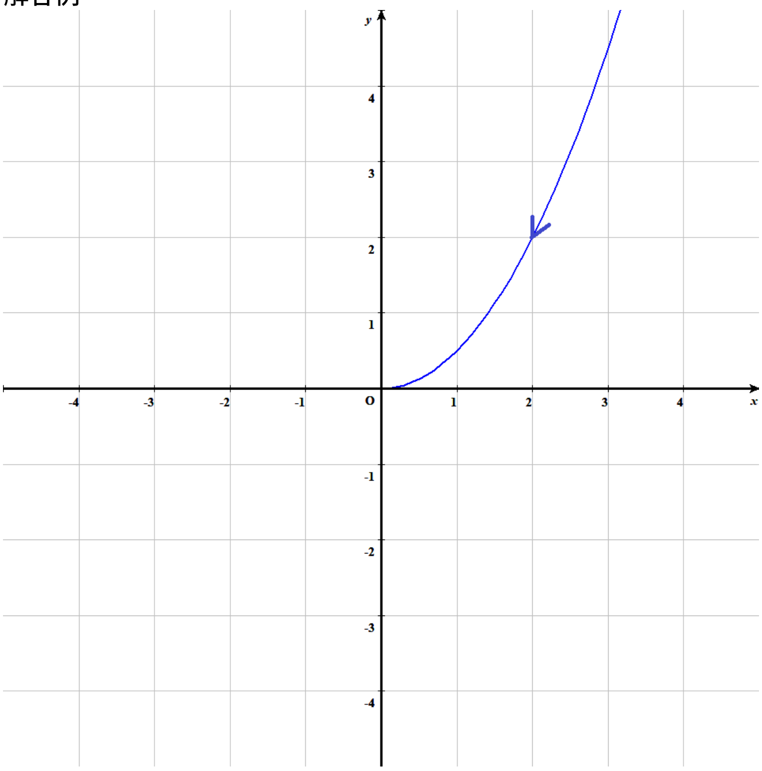
となることを示せ.

(2) $\lambda_- < \lambda_+ < 0$ とする. このとき,

$$y(t) = C_2 \left(\frac{1}{C_1} x(t) \right)^{\frac{\lambda_-}{\lambda_+}}$$

が得られることを計算せよ. またこの関係を用いて xy-平面に解曲線をかけ. ただし, 解答例を参考に C_1, C_2 の符号で場合分けして同じグラフに書き込め. また発展の向きが分かるように矢印を書け.

解答例



$C_1 > 0,\ C_2 > 0$ のとき左の図.
$C_1 < 0,\ C_2 > 0$ のとき
$C_1 < 0,\ C_2 < 0$ のとき
$C_1 > 0,\ C_2 < 0$ のとき
$C_1 = 0,\ C_2 > 0$ のとき
$C_1 = 0,\ C_2 < 0$ のとき
$C_1 > 0,\ C_2 = 0$ のとき
$C_1 < 0,\ C_2 = 0$ のとき
$C_1 = 0,\ C_2 = 0$ のとき

提出する場合は, 解答例を参考にして自分で採点をしておくこと. 提出しなくても試験で 60 点以上取れば合格です.