2023/12/07/No.10

微分方程式II・自習シート

問 1　A の固有値と固有ベクトルを求め, さらに e^{tA} を求めよ (ただし各正則行列 P, Q, R およびその逆行列は一例なのでそのままでよい).

(1)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(2)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

(3)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

問 2　[定数変化法] 次の微分方程式を手順に従って解け.

$$x'(t) = \frac{1}{t}x(t) + \log t \tag{1}$$

(i) 補助的に

$$x'(t) = \frac{1}{t}x(t)$$

を解き, 一般解が $x(t) = Ct$ となることを確かめよ.

(ii) (i) で得られた一般解 $x(t) = Ct$ の定数 C を t の関数 $C(t)$ と見なし,

$$x(t) = C(t)t$$

の両辺を t について微分することで, **(1) を満たすためには**

$$C'(t) = \frac{\log t}{t} \tag{2}$$

を満たせば良いことを確かめよ.

(iii) (ii) で得られた $C(t)$ の微分方程式 (2) をとき, (1) の一般解を求めよ.

問 3　[定数変化法] $a \in \mathbb{R}$, $f(t)$ を与えられた関数とする. 次の微分方程式を手順に従って解け.

$$x'(t) = ax(t) + f(t) \tag{3}$$

(i) 補助的に

$$x'(t) = ax(t)$$

を解き, 一般解が $x(t) = Ce^{at}$ となることを確かめよ.

提出する場合は, 解答例を参考にして自分で採点をしておくこと. 提出しなくても試験で 60 点以上取れば合格です.

(ii) (i) で得られた一般解 $x(t) = Ce^{at}$ の定数 C を t の関数 $C(t)$ と見なし,

$$x(t) = C(t)e^{at}$$

の両辺を t について微分することで, **(3) を満たすためには**

$$C'(t) = e^{-at}f(t) \tag{4}$$

を満たせば良いことを確かめよ.

(iii) (ii) で得られた $C(t)$ の微分方程式 (4) の両辺を $[0, t]$ で積分することで, (3) の一般解が

$$x(t) = C_0 e^{at} + \int_0^t e^{a(t-s)} f(s) ds$$

であることを示せ (ただし $C(0) = C_0$).

(iv)

$$\begin{cases} x'(t) = ax(t) + f(t), & (t > 0) \\ x(0) = x_0 & (t = 0) \end{cases}$$

の特解は

$$x(t) = e^{at}x_0 + \int_0^t e^{a(t-s)} f(s) ds$$

で求められることを示せ.