2024/01/09/No.9

微分方程式II・自習シート

問 1

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

とする.

(1) A の固有値と固有ベクトルを求め, さらに e^{tA} を求めよ.

解答例

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -2 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

より行列式が 0 となるのは

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} &= -\lambda(3-\lambda) + 2 \\ &= \lambda(\lambda - 3) + 2 \\ &= \lambda^2 - 3\lambda + 2 \\ &= (\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0 \end{aligned}$$

より, 固有値は $\lambda = 1, 2$ [1]. $\lambda = 1$ のとき固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

より $-x_1 + x_2 = 0$ から

$$\boldsymbol{x} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad ({}^\forall t \in \mathbb{R}; t \neq 0)$$

は対応する固有ベクトルとなる. $\lambda = 2$ のとき固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

より $-2x_1 + x_2 = 0$ から

$$\boldsymbol{x} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad ({}^\forall t \in \mathbb{R}; t \neq 0)$$

は対応する固有ベクトルとなる. 以上より

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

提出する場合は, 解答例を参考にして自分で採点をしておくこと. 提出しなくても試験で 60 点以上取れば合格です.

[1] $1 + 2 = 3 = \mathrm{tr}A = 0 + 3$ より確かに正しそう.

によって A は

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = B$$

に対角化できる．つまり

$$A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} P^{-1} = PBP^{-1}$$

と変形できる．よって

$$\begin{aligned}
e^{tA} &= e^{tPBP^{-1}} \\
&= Pe^{tB}P^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2e^t & -e^t \\ -e^{2t} & e^{2t} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2e^t - e^{2t} & -e^t + e^{2t} \\ 2e^t - 2e^{2t} & -e^t + 2e^{2t} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

(2) (1) を用いて次の連立微分方程式

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -2x + 3y \end{cases}$$

を初期条件 $(x(0), y(0)) = (1, 0)$ とともに解け．

解答例

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

とする．(2) の微分方程式は

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}'(t) = A\boldsymbol{x}(t) \\ \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0 \end{cases}$$

とかけ，その解は

$$\boldsymbol{x}(t) = e^{tA}\boldsymbol{x}_0$$

で与えられるが (1) より

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x}(t) &= \begin{pmatrix} 2e^t - e^{2t} & -e^t + e^{2t} \\ 2e^t - 2e^{2t} & -e^t + 2e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2e^t - e^{2t} \\ 2e^t - 2e^{2t} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

問 2　A を n 次正方行列とし, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ を A の固有値とする. ただし, 固有値が重複する場合にはその分だけ分けておき固有値の個数を n 個になるようにしておく. このとき次が成立することを, $n=2$ のときを参考にして $n=3$ のときを証明せよ:

(i) $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\cdots+\lambda_n = a_{11}+a_{22}+a_{33}+\cdots+a_{nn}$　($= \mathrm{tr}A$ とかき A のトレースと呼ぶ);

(ii) $\lambda_1 \times \lambda_2 \times \lambda_3 \cdots \times \lambda_n = \mathrm{detA}$　($= |A|$).

参考にする証明の例　$n=2$ のとき. 固有値を求める方程式は

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{pmatrix}$$

より

$$\begin{aligned} \det(A-\lambda I) &= (a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda) - a_{12}a_{21} \\ &= \lambda^2 - (a_{11}+a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \\ &= \lambda^2 - \mathrm{tr}A\lambda + \det A \end{aligned} \tag{1}$$

である. そこで, この式を

$$g(\lambda) := \det(A-\lambda I)$$

(これを固有多項式とよび $g(\lambda)=0$ を固有方程式とよんだりする) と定義し, λ_1, λ_2 を A の固有値とすれば固有値の定義から

$$g(\lambda_1)=0, \quad g(\lambda_2)=0$$

を満たす. よって, $g(\lambda)$ は λ の 2 次式で λ^2 の係数は 1 なので

$$g(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2) = \lambda^2 - (\lambda_1+\lambda_2)\lambda + \lambda_1\lambda_2 \tag{2}$$

の形をしていることが分かる. (1) と (2) の **2 番目の項の係数**と**最後の項の係数**を比較すると,

$$\lambda_1+\lambda_2 = \mathrm{tr}A, \quad \lambda_1\lambda_2 = \mathrm{detA}$$

を得る.

解答例　$n=3$ のとき. 固有値を求める方程式は

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{pmatrix}$$

より

$$
\begin{aligned}
g(\lambda) &= \det(A-\lambda I)\\
&= \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix}\\
&= (a_{11}-\lambda)\begin{vmatrix} a_{22}-\lambda & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13}\\ a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13}\\ a_{22}-\lambda & a_{23} \end{vmatrix}\\
&= (a_{11}-\lambda)\big\{(a_{22}-\lambda)(a_{33}-\lambda)-a_{23}a_{32}\big\} - a_{21}\big\{a_{12}(a_{33}-\lambda)-a_{13}a_{32}\big\}\\
&\quad + a_{31}\big\{a_{12}a_{23}-a_{13}(a_{22}-\lambda)\big\}\\
&= -\lambda^3 + (a_{11}+a_{22}+a_{33})\lambda^2 - \boxed{}\lambda\\
&\quad + (a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{13}a_{32}+a_{31}a_{12}a_{23}-a_{11}a_{23}a_{31}-a_{21}a_{12}a_{33}-a_{31}a_{13}a_{22})\\
&= -\lambda^3 + \mathrm{tr}A\lambda^2 - \boxed{}\lambda + \det A \qquad (3)
\end{aligned}
$$

である. そこで, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ を A の固有値とすれば固有値の定義から

$$g(\lambda_1)=0, \quad g(\lambda_2)=0, \quad g(\lambda_3)=0$$

を満たす. よって, $g(\lambda)$ は λ の 3 次式で λ^3 の係数は -1 なので

$$g(\lambda) = -(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\lambda_3) = -\lambda^3 + (\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)\lambda^2 - \boxed{}\lambda + \lambda_1\lambda_2\lambda_3 \qquad (4)$$

の形をしていることが分かる. (3) と (4) の **2 番目の項の係数**と**最後の項の係数**を比較すると,

$$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 = \mathrm{tr}A, \quad \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = \mathrm{detA}$$

を得る.