微分方程式II・自習シート

問 1　次のような 3 階の定数係数線形常微分方程式を考える:

$$x''' - 2x'' - x' + 2x = 0 \tag{1}$$

x' を x_1, x'' を x_2 とおくと

$$x_2' - 2x_2 - x_1 + 2x = 0$$

に直せるので, 上記の微分方程式は無理矢理, **次の 1 階の連立微分方程式**に書き直すことができる:(つまり未知数を x のほかに x_1, x_2 と増やした代わりに微分の階数は 1 階だけに書き換える)

$$\begin{cases} x' = x_1 & = 0x + 1x_1 + 0x_2, \\ x_1' = x_2 & = 0x + 0x_1 + 1x_2, \\ x_2' = 2x_2 + x_1 - 2x & = -2x + 1x_1 + 2x_2 \end{cases}$$

よって微分方程式 (1) は

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}'(t) = A\boldsymbol{x}(t) \tag{2}$$

と同値である. ただし,

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

が未知ベクトル [1] と行列 A となる. つまり初期条件 $\boldsymbol{x}_0$ を与えれば

$$\boldsymbol{x}(t) = e^{tA}\boldsymbol{x}_0$$

で解は求められる.

次の微分方程式を (2) の形で見るためのベクトル $\boldsymbol{x}$ と行列 A をそれぞれ求めよ.

(1) $x'' + 3x' + 2x = 0$

解答例　$x_1 = x'$ とおくと, $x_1' + 3x_1 + 2x = 0$, つまり $x_1' = -2x - 3x_1$ となるので微分方程式は

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ x_1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}'(t) = A\boldsymbol{x}(t)$$

提出する場合は, 解答例を参考にして自分で採点をしておくこと. 提出しなくても試験で 60 点以上取れば合格です.

[1] x と $x(t)$ の違いは特に意識しなくていいが, (2) の上も $x(t)$ のように t をつけると長くなるので省略した. 正しくはすべて $x(t)$ と t の関数だと分かるように書くべき.

と同値である. ただし,

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ x_1(t) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$$

が未知ベクトルと行列 A となる.

(2) $x'' + 9x = 0$

解答例　$x_1 = x'$ とおくと, $x_1' + 9x = 0$, つまり $x_1' = -9x$ となるので微分方程式は

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -9 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ x_1 \end{pmatrix}$$
$$\boldsymbol{x}'(t) = A\boldsymbol{x}(t)$$

と同値である. ただし,

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ x_1(t) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -9 & 0 \end{pmatrix}$$

が未知ベクトルと行列 A となる.

(3) $x''' - 4x'' + 5x' - 2x = 0$

解答例　$x_1 = x'$, $x_2 = x''$ とおくと, $x_2' - 4x_2 + 5x_1 - 2x = 0$, つまり $x_2' = 2x - 5x_1 + 4x_2$ となるので微分方程式は

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$
$$\boldsymbol{x}'(t) = A\boldsymbol{x}(t)$$

と同値である. ただし,

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 4 \end{pmatrix}$$

が未知ベクトルと行列 A となる.

(4) $x^{(4)} + 2x'' + x = 0$

解答例　$x_1 = x'$, $x_2 = x''$, $x_3 = x'''$ とおくと, $x_3' + 2x_2 + x = 0$, つまり $x_3' = -x - 2x_2$ となるので微分方程式は

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$
$$\boldsymbol{x}'(t) = A\boldsymbol{x}(t)$$

と同値である. ただし,

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

が未知ベクトルと行列 A となる.

問 2 次の行列に対して固有値と固有ベクトルを求め, 対角化のための P を求めよ [2).]

(1)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

解答例

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 4 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

より行列式が 0 となるのは

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} &= (3-\lambda)^2 - 4 \\ &= \lambda^2 - 6\lambda + 9 - 4 \\ &= \lambda^2 - 6\lambda + 5 \\ &= (\lambda - 1)(\lambda - 5) = 0 \end{aligned}$$

より, 固有値は $\lambda = 1, 5$. $\lambda = 1$ のとき固有ベクトルは

$$A - 1I = \begin{pmatrix} 3-1 & 1 \\ 4 & 3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

より $2x_1 + x_2 = 0$ から

$$\boldsymbol{x} = t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad ({}^\forall t \in \mathbb{R}; t \neq 0).$$

$\lambda = 5$ のとき固有ベクトルは

$$A - 5I = \begin{pmatrix} 3-5 & 1 \\ 4 & 3-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

より $-2x_1 + x_2 = 0$ から

$$\boldsymbol{x} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad ({}^\forall t \in \mathbb{R}; t \neq 0).$$

以上より

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

[2)] $P^{-1}AP$ が対角行列となるための正則行列 P のこと.

によって A は

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

に対角化できる.

(2)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

解答例

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 0 - \lambda & 4 \\ 1 & 0 - \lambda \end{pmatrix}$$

より行列式が 0 となるのは

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 4 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4 = 0$$

より, 固有値は $\lambda = 2, -2$. $\lambda = 2$ のとき固有ベクトルは

$$A - 2I = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

より $x_1 - 2x_2 = 0$ から

$$\boldsymbol{x} = t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ({}^{\forall} t \in \mathbb{R}; t \neq 0).$$

$\lambda = -2$ のとき固有ベクトルは

$$A - (-2)I = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

より $x_1 + 2x_2 = 0$ から

$$\boldsymbol{x} = t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ({}^{\forall} t \in \mathbb{R}; t \neq 0).$$

以上より

$$P = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

によって A は

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

に対角化できる.