

微分方程式 II・自習シート

問 1

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

について

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I,$$

$$A^3 = A^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I,$$

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$

よって

$$\begin{aligned} e^{tA} &= I + tA + \frac{1}{2!}(tA)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}(tA)^n + \cdots \\ &= I + tI + \frac{1}{2!}t^2I + \cdots + \frac{1}{n!}t^nI + \cdots \\ &= \begin{pmatrix} 1 + t + \frac{1}{2!}t^2 + \cdots + \frac{1}{n!}t^n + \cdots & 0 \\ 0 & 1 + t + \frac{1}{2!}t^2 + \cdots + \frac{1}{n!}t^n + \cdots \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

が求められる。同様に

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

について B^n , C^n を計算し e^{tB} と e^{tC} をそれぞれ求めよ。

解答例

$$\begin{aligned} B^2 &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ B^3 &= B^2 \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ B^n &= \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} e^{tB} &= I + tB + \frac{1}{2!}(tB)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}(tB)^n + \cdots \\ &= I + t \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2!}t^2 \begin{pmatrix} 2^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \cdots + \frac{1}{n!}t^n \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \cdots \\ &= \begin{pmatrix} 1 + 2t + \frac{1}{2!}(2t)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}(2t)^n + \cdots & 0 \\ 0 & 1 + t + \frac{1}{2!}t^2 + \cdots + \frac{1}{n!}t^n + \cdots \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C^2 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-1)^2 \end{pmatrix}, \\ C^3 &= C^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-1)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-1)^3 \end{pmatrix}, \\ C^n &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} e^{tC} &= I + tC + \frac{1}{2!}(tC)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}(tC)^n + \cdots \\ &= I + t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2!}t^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-1)^2 \end{pmatrix} + \cdots + \frac{1}{n!}t^n \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix} + \cdots \\ &= \begin{pmatrix} 1 + t + \frac{1}{2!}t^2 + \cdots + \frac{1}{n!}t^n + \cdots & 0 \\ 0 & 1 + (-t) + \frac{1}{2!}(-t)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}(-t)^n + \cdots \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

問2

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

について、固有値と固有ベクトルを求め、対角化を行うことで A^n を求めよ。

解答例 固有値と固有ベクトルとは

$$Ax = \lambda x$$

を満たす λ と $\mathbf{0}$ でないベクトル \mathbf{x} のことである。右辺を移項すると

$$(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

だが、もし $A - \lambda I$ が逆行列を持てば、

$$\begin{aligned} (A - \lambda I)^{-1}(A - \lambda I)\mathbf{x} &= (A - \lambda I)^{-1}\mathbf{0}, \\ \mathbf{x} &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

となり λ は固有値ではない. $A - \lambda I$ は逆行列をたない, すなわち行列式が 0 となる λ を求めると

$$\begin{aligned}\det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 4 - \lambda & -2 \\ 1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0, \\ (4 - \lambda)(1 - \lambda) + 2 &= 0, \\ (\lambda - 4)(\lambda - 1) + 2 &= 0, \\ \lambda^2 - 5\lambda + 6 &= 0, \\ (\lambda - 2)(\lambda - 3) &= 0\end{aligned}$$

より $\lambda = 2, 3$. $\lambda = 2$ のとき固有ベクトルは

$$A\mathbf{x} = 2\mathbf{x}$$

を解くと

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

より固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\forall t \in \mathbb{R}; t \neq 0).$$

$\lambda = 3$ のとき固有ベクトルは

$$A\mathbf{x} = 3\mathbf{x}$$

を解くと

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

より固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\forall t \in \mathbb{R}; t \neq 0).$$

以上より

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

によって A は対角化できる.

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} =: B.$$

さらに $A = PBP^{-1} = B$ より

$$A^2 = AA = (PBP^{-1})(PBP^{-1}) = PBIBP^{-1} = PBBP^{-1} = PB^2P^{-1},$$

$$A^3 = A^2A = (PB^2P^{-1})(PBP^{-1}) = PB^2BP^{-1} = PB^3P^{-1},$$

$$A^n = PB^nP^{-1}$$

に注意すると

$$B^n = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix},$$

$$A^n = P B^n P^{-1}$$

$$\begin{aligned} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2^n & 2 \cdot 2^n \\ 3^n & -3^n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2^n + 2 \cdot 3^n & 2 \cdot 2^n - 2 \cdot 3^n \\ -2^n + 3^n & 2 \cdot 2^n - 3^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$