微分方程式II・自習シート

問 1　$x := x(t)$ とし, $a \in \mathbb{R}; a \neq 0$ する. 求積法によって

$$\frac{dx}{dt} = ax$$

の一般解 (任意定数 C を含む形の解) を求めよ. また, $t = 0$ における初期条件を追加し

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

の特解 (初期条件から一般解の任意定数 C を 1 つに定める) を求めよ.

解答例　$x \neq 0$ のとき

$$\frac{dx}{dt} = ax$$

の両辺を x で割ると

$$\frac{1}{x}\frac{dx}{dt} = a$$

を得る (変数分離). 両辺を t について積分すると

$$\int \frac{1}{x}\frac{dx}{dt}dt = \int a dt,$$

$$\int \frac{1}{x}dt = \int a dt,$$

$$\log|x| + C_1 = at + C_2$$

ただし, C_1 と C_2 は積分定数. よって, $C_3 := C_1 - C_2$ とおいて, 式変形すると [1)]

$$\log|x| = at + C_3,$$

$$|x| = e^{at+C_3} = e^{at}e^{C_3},$$

$$x = \pm e^{C_3}e^{at}.$$

ここで, $C := \pm e^{C_3}$ とおくと

$$x = Ce^{at}$$

を得る. 一方, $x = 0$ について, これも微分方程式を満たすので 1 つの解であるが, $C = 0$ の場合で表現可能である. よって一般解は $x = Ce^{at}$ である.

次に $x(0) = x_0$ を満たすように C を決めると,

$$x(0) = Ce^{a\times 0} = Ce^0 = C$$

なので, 初期条件より $C = x_0$ が得られる. 以上により特解は $x = x_0e^{at}$.

提出する場合は, 解答例を参考にして自分で採点をしておくこと. 提出しなくても試験で 60 点以上取れば合格です.

[1)] $\log_2 8 = 3$ であるが, それは対数の定義 $2^{\log_2 8} = 2^3 = 8$ からの帰結である. よって $\log|x| = at + C_3$ より $e^{\log|x|} = e^{at+C_3}$ だが左辺は対数の定義から $|x|$ そのものである.

問 2　$x := x(t), y := y(t)$ とする．次の連立微分方程式の一般解を次の手順に従って求めよ．

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2x + 2y \\ \dfrac{dy}{dt} = -x - 5y \end{cases}$$

簡単のため $dx/dt = x'$, $dy/dt = y'$ のように表記する．

(1) 2 つめの式 $x = -y' - 5y$ とそれを微分した式

$$x' = -y'' - 5y'$$

を用意する．これらを 1 つめの式に代入することで y だけの微分方程式

$$y'' + 7y' + 12 = 0$$

が得られることを確かめよ．

解答例

$$(-y'' - 5y') = -2(-y' - 5y) - 5y.$$

よって

$$y'' + 7y' + 12 = 0.$$

(2) (1) で得られた微分方程式を解いて一般解 y を求めよ．

解答例

$$y'' + 7y' + 12 = 0$$

の特性方程式

$$\lambda^2 + 7\lambda + 12 = 0,$$
$$(\lambda + 4)(\lambda + 3) = 0$$

より $\lambda = -3, -4$．以上から一般解は

$$y(t) = C_1 e^{-3t} + C_2 e^{-4t}$$

(3) (2) で得られた y を用いて x を求めよ．

解答例

$$y(t) = C_1 e^{-3t} + C_2 e^{-4t},$$
$$y'(t) = -3C_1 e^{-3t} - 4C_2 e^{-4t}.$$

2 つめの式から

$$\begin{aligned} x &= -y' - 5y \\ &= -(-3C_1 e^{-3t} - 4C_2 e^{-4t}) - 5(C_1 e^{-3t} + C_2 e^{-4t}) \\ &= -2C_1 e^{-3t} - C_2 e^{-4t}. \end{aligned}$$

問 3　2 次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

を考える. フロベニウスノルム

$$\|A\| := \sqrt{\sum_{i,j=1}^{2} |a_{ij}|^2} = \sqrt{|a_{11}|^2 + |a_{12}|^2 + |a_{21}|^2 + |a_{22}|^2}$$

を思い出し, $\|A\|$ と $\|I\|$ の値をそれぞれ求め, この場合 $\|AI\| = \|A\|\|I\|$ は成立しないことを確かめよ.

解答例

$$\|A\| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-3)^2 + 4^2} = \sqrt{1+4+9+16} = \sqrt{30},$$
$$\|I\| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

次に $AI = A$ であることに注意すると

$$\|AI\| = \|A\| = \sqrt{30}.$$

一方

$$\|A\|\|I\| = \sqrt{30}\sqrt{2} = 2\sqrt{15}$$

となり, この場合 $\|AI\| = \|A\|\|I\|$ は成立しない.

問 4　n 次正方行列を考える. 行列のノルムとして講義で用いたフロベニウスノルムとは異なる次のノルムを考える:

$$\|A\|_1 := \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}| = |a_{11}| + |a_{12}| + \cdots + |a_{nn}|.$$

このとき次の問いに答えよ.

(1) 次の行列 A, B, I に対して $\|A\|_1$, $\|B\|_1$, $\|I\|_1$ の値をそれぞれ求めよ [2].

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 10 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

解答例

$$\|A\|_1 = |1| + |2| + |8| + |10| = 21,$$
$$\|B\|_1 = |2| + |1| + |0| + |1| + |2| + |1| + |0| + |1| + |2| = 3 + 4 + 3 = 10,$$
$$\|I\|_1 = |1| + |0| + |0| + |1| = 2.$$

(2) 任意の n 次正方行列 A と任意の実数 $t \in \mathbb{R}$ に対して

$$\|tA\|_1 = |t|\|A\|_1$$

が成立することを証明せよ.

[2] もう [ ] ではなく ( ) を使うことにする.

解答例

$$\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= \|tA\|_1 \\
&= \left\| t \begin{pmatrix} ta_{11} & ta_{12} & \cdots & ta_{1n} \\ ta_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ ta_{n1} & \cdots & & ta_{nn} \end{pmatrix} \right\|_1 \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} |ta_{ij}| \\
&= |t| \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}| \\
&= |t|\|A\|_1 = (\text{右辺})
\end{aligned}$$

よって成立. □

(3) 任意の n 次正方行列 A, B に対して次の劣加法性 (三角不等式) が成立することを証明せよ.

$$\|A+B\|_1 \leq \|A\|_1 + \|B\|_1.$$

解答例

$$\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= \|A+B\|_1 \\
&= \left\| \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1}+b_{n1} & \cdots & & a_{nn}+b_{nn} \end{pmatrix} \right\|_1 \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}+b_{ij}| \\
&\leq \sum_{i,j=1}^{n} (|a_{ij}|+|b_{ij}|) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}| + \sum_{i,j=1}^{n} |b_{ij}| \\
&= \|A\|_1 + \|B\|_1 = (\text{右辺})
\end{aligned}$$

よって, $\|A+B\|_1 \leq \|A\|_1 + \|B\|_1$ が成立. □

(4) 任意の n 次正方行列 A, B に対して次の劣乗法性が成立することを証明せよ [3].

$$\|AB\|_1 \leq \|A\|_1\|B\|_1.$$

[3] ただし, 次の不等式を用いてもよい:

$$\sum_{k=1}^{2} |a_k||b_k| = |a_1||b_1| + |a_2||b_2|,$$

$$\left(\sum_{k=1}^{2} |a_k|\right)\left(\sum_{\ell=1}^{2} |b_\ell|\right) = |a_1||b_1| + |a_2||b_1| + |a_1||b_2| + |a_2||b_2|,$$

$$\sum_{k=1}^{2} |a_k||b_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{2} |a_k|\right)\left(\sum_{\ell=1}^{2} |b_\ell|\right)$$

解答例

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= \|AB\|_1 \\
&= \left\| \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & & b_{nn} \end{pmatrix} \right\|_1 \\
&= \left\| \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n a_{1k}b_{k1} & \sum_{k=1}^n a_{1k}b_{k2} & \cdots & \sum_{k=1}^n a_{1k}b_{kn} \\ \sum_{k=1}^n a_{2k}b_{k1} & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ \sum_{k=1}^n a_{nk}b_{k1} & & \cdots & \sum_{k=1}^n a_{nk}b_{kn} \end{pmatrix} \right\|_1 \\
&= \sum_{i,j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n |a_{ik}b_{kj}| \right) \\
&= \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ik}||b_{kj}| \right) \\
&= \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^n |a_{ik}| \right) \left(\sum_{j=1}^n |b_{kj}| \right) \\
&\leq \left(\sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n |a_{ik}| \right) \left(\sum_{\ell=1}^n \sum_{j=1}^n |b_{lj}| \right) \\
&= \|A\|_1 \|B\|_1 = (\text{右辺})
\end{aligned}
$$

よって成立. □

を一般化して

$$
\sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^n |a_{ik}| \right) \left(\sum_{j=1}^n |b_{kj}| \right) \leq \left(\sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n |a_{ik}| \right) \left(\sum_{\ell=1}^n \sum_{j=1}^n |b_{lj}| \right)
$$