2023/10/12/No.5

微分方程式II・自習シート

問 1　$a, b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ とすると次の二項定理が成立する:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k a^{n-k} b^k = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k a^k b^{n-k}$$

ただし,

$${}_n\mathrm{C}_k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

次の問いに答えよ

(1) $(x+1)^{10}$ を展開したときの x^9, x^4 の係数をそれぞれ求めよ.

解答例　x^9 の係数は ${}_{10}\mathrm{C}_1$ なので

$${}_{10}\mathrm{C}_1 = \frac{10!}{9!1!} = 10$$

x^4 の係数は ${}_{10}\mathrm{C}_6 =_{10} \mathrm{C}_4$ なので

$${}_{10}\mathrm{C}_4 = \frac{10!}{4!6!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6!}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 6!} = 210$$

(2) $\left(2x - \dfrac{1}{x}\right)^6$ を展開したときの x^4, $\frac{1}{x^2}$ の係数をそれぞれ求めよ.

解答例　x^4 は

$$(2x)^5(-\frac{1}{x})^1$$

の組み合わせで構成されるので ${}_6\mathrm{C}_1$ と組み合わせれば

$${}_6\mathrm{C}_1(2x)^5(-\frac{1}{x})^1 = 6 \cdot 2^5(-1)^1 x^4 = -192x^4$$

より x^4 の係数は -192.

$\frac{1}{x^2}$ は

$$(2x)^2(-\frac{1}{x})^4$$

の組み合わせで構成されるので ${}_6\mathrm{C}_4 = {}_6\mathrm{C}_2$ と組み合わせれば

$${}_6\mathrm{C}_2(2x)^2(-\frac{1}{x})^4 = \frac{6!}{4!2!} \cdot 2^2(-1)^4\frac{1}{x^2} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4!}{4! \cdot 2} \cdot 4\frac{1}{x^2} = 60\frac{1}{x^2}$$

より $\frac{1}{x^2}$ の係数は 60.

提出する場合は, 解答例を参考にして自分で採点をしておくこと. 提出しなくても試験で 60 点以上取れば合格です.

問 2　$A,\ B$ を m 次正方行列とし，$AB = BA$ を満たすとする．このとき $(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2 = A^2 + 2AB + B^2$ に注意すると次の二項定理が成立する:

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k A^{n-k} B^k = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k A^k B^{n-k}$$

$N \in \mathbb{N}$ とする．次の問いに答えよ．

(1)

$$I + (A+B) + \frac{1}{2!}(A+B)^2$$

を展開して A の昇べきの順に書き直すと

$$\begin{aligned} I + (A+B) + \frac{1}{2!}(A+B)^2 &= I + (A+B) + \frac{1}{2!}(A^2 + 2AB + B^2) \\ &= \left(I + B + \frac{1}{2!}B^2\right) + A(I+B) + \frac{1}{2!}A^2 \end{aligned}$$

となる．これに従い，

$$I + (A+B) + \frac{1}{2!}(A+B)^2 + \frac{1}{3!}(A+B)^3$$

や

$$I + (A+B) + \frac{1}{2!}(A+B)^2 + \frac{1}{3!}(A+B)^3 + \cdots + \frac{1}{N!}(A+B)^N$$

を昇べきの順に書き直せ．

解答例

$$\begin{aligned} &I + (A+B) + \frac{1}{2!}(A+B)^2 + \frac{1}{3!}(A+B)^3 \\ &= I + (A+B) + \frac{1}{2!}(A^2 + 2AB + B^2) + \frac{1}{3!}(A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3) \\ &= \left(I + B + \frac{1}{2!}B^2 + \frac{1}{3!}B^3\right) + A\left(I + B + \frac{1}{2!}B^2\right) + \frac{1}{2!}A^2\,(I+B) + \frac{1}{3!}A^3 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&I+(A+B)+\frac{1}{2!}(A+B)^2+\frac{1}{3!}(A+B)^3+\cdots+\frac{1}{N!}(A+B)^N\\
&=I+(A+B)+\frac{1}{2!}(A^2+2AB+B^2)+\frac{1}{3!}(A^3+3A^2B+3AB^2+B^3)+\cdots\\
&\quad+\frac{1}{N!}\sum_{k=0}^{N}\ {}_N\mathrm{C}_k A^{N-k}B^k\\
&=I+(A+B)+\frac{1}{2!}(A^2+2AB+B^2)+\frac{1}{3!}(A^3+3A^2B+3AB^2+B^3)+\cdots\\
&\quad+\frac{1}{N!}\sum_{k=0}^{N}\ \frac{N!}{k!(N-k)!}A^{N-k}B^k\\
&=I+(A+B)+\frac{1}{2!}(A^2+2AB+B^2)+\frac{1}{3!}(A^3+3A^2B+3AB^2+B^3)+\cdots\\
&\quad+\sum_{k=0}^{N}\frac{1}{(N-k)!}A^{N-k}\frac{1}{k!}B^k\\
&=\left(I+B+\frac{1}{2!}B^2+\cdots+\frac{1}{N!}B^N\right)+A\left(I+B+\frac{1}{2!}B^2+\cdots+\frac{1}{(N-1)!}B^{N-1}\right)\\
&\quad+\frac{1}{2!}A^2\left(I+B+\frac{1}{2!}B^2+\cdots+\frac{1}{(N-2)!}B^{N-2}\right)+\cdots+\frac{1}{N!}A^N
\end{aligned}
$$

(2) 行列 e^A を

$$
e^A:=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}A^k=I+A+\frac{1}{2!}A^2+\frac{1}{3!}A^3+\cdots+\frac{1}{N!}A^N+\cdots
$$

で定義する. 級数の項の入れ替えを認めて

$$
e^{A+B}=e^Ae^B
$$

を確かめよ.

解答例

$$
\begin{aligned}
&I+(A+B)+\frac{1}{2!}(A+B)^2+\frac{1}{3!}(A+B)^3+\cdots+\frac{1}{N!}(A+B)^N+\cdots\\
&=I+(A+B)+\frac{1}{2!}(A^2+2AB+B^2)+\frac{1}{3!}(A^3+3A^2B+3AB^2+B^3)+\cdots\\
&\quad+\frac{1}{N!}\sum_{k=0}^{N}\ {}_N\mathrm{C}_k A^{N-k}B^k+\cdots\\
&=I+(A+B)+\frac{1}{2!}(A^2+2AB+B^2)+\frac{1}{3!}(A^3+3A^2B+3AB^2+B^3)+\cdots\\
&\quad+\frac{1}{N!}\sum_{k=0}^{N}\ \frac{N!}{k!(N-k)!}A^{N-k}B^k+\cdots\\
&=I+(A+B)+\frac{1}{2!}(A^2+2AB+B^2)+\frac{1}{3!}(A^3+3A^2B+3AB^2+B^3)+\cdots\\
&\quad+\sum_{k=0}^{N}\frac{1}{(N-k)!}A^{N-k}\frac{1}{k!}B^k+\cdots\\
&=e^B+Ae^B+\frac{1}{2!}A^2e^B+\cdots+\frac{1}{N!}A^Ne^B+\cdots=e^Ae^B
\end{aligned}
$$