微分方程式II・自習シート

問 1　$x \in \mathbb{R}$ とすると

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots \left(= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}x^k \right)$$

と級数展開できる. $z \in \mathbb{C}$ に対して, 次の複素数値

$$1 + z + \frac{1}{2!}z^2 + \frac{1}{3!}z^3 + \cdots + \frac{1}{n!}z^n$$

の極限

$$1 + z + \frac{1}{2!}z^2 + \frac{1}{3!}z^3 + \cdots + \frac{1}{n!}z^n + \cdots \left(= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}z^k \right)$$

が存在することを利用して, その値を e^z を定義することにしよう (もはや e を z 回かけるではない). i を虚数単位, つまり $i = \sqrt{-1}$ とする.

(1) $\theta \in \mathbb{R}$ とする. 複素数 $i\theta$ について e^z の $z = i\theta$ における $2n+1$ 次近似式が

$$\begin{aligned}&\left(1 - \frac{1}{2!}\theta^2 + \frac{1}{4!}\theta^4 - \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n)!}\theta^{2n}\right) \\ &\quad + i\left(\theta - \frac{1}{3!}\theta^3 + \frac{1}{5!}\theta^5 - \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!}\theta^{2n+1}\right)\end{aligned}$$

になることを計算せよ.

解答例

$$\begin{aligned}&1 + (i\theta) + \frac{1}{2!}(i\theta)^2 + \frac{1}{3!}(i\theta)^3 + \frac{1}{4!}(i\theta)^4 + \frac{1}{5!}(i\theta)^5 + \cdots + \frac{1}{(2n)!}(i\theta)^{2n} + \frac{1}{(2n+1)!}(i\theta)^{2n+1} \\ &= 1 + i\theta - \frac{1}{2!}\theta^2 + \frac{1}{3!}i\theta^3 + \frac{1}{4!}\theta^4 + \frac{1}{5!}i\theta^5 - \cdots + (-1)^n\frac{1}{(2n)!}\theta^{2n} + (-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}i\theta^{2n+1} \\ &= \left(1 - \frac{1}{2!}\theta^2 + \frac{1}{4!}\theta^4 - \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n)!}\theta^{2n}\right) \\ &\quad + i\left(\theta - \frac{1}{3!}\theta^3 + \frac{1}{5!}\theta^5 - \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!}\theta^{2n+1}\right)\end{aligned}$$

(2) 複素数 $i\theta$ について, 次の**オイラーの公式**

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

を証明せよ [1].

提出する場合は, 解答例を参考にして自分で採点をしておくこと. 提出しなくても試験で 60 点以上取れば合格です.

[1] つまり e の複素数 $i\theta$ 乗である $e^{i\theta}$ は複素数だが, 実部が $\cos\theta$, 虚部が $\sin\theta$ で簡単に求められるという公式. なお

$$\cos\theta = 1 - \frac{1}{2!}\theta^2 + \frac{1}{4!}\theta^4 - \cdots + (-1)^n\frac{1}{(2n)!}\theta^{2n} + \cdots$$

$$\sin\theta = \theta - \frac{1}{3!}\theta^3 + \frac{1}{5!}\theta^5 - \cdots + (-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}\theta^{2n+1} + \cdots$$

を用いてもよい.

解答例　$e^{i\theta}$ は次の値

$$1+(i\theta)+\frac{1}{2!}(i\theta)^2+\frac{1}{3!}(i\theta)^3+\frac{1}{4!}(i\theta)^4+\frac{1}{5!}(i\theta)^5+\cdots+\frac{1}{N!}(i\theta)^N$$

の極限値なので, $N\to+\infty$ は最後の番号 N を $2n+1$ にして $n\to+\infty$ としても同じことである. よって (1) より

$$\begin{aligned}
&1+(i\theta)+\frac{1}{2!}(i\theta)^2+\frac{1}{3!}(i\theta)^3+\frac{1}{4!}(i\theta)^4+\frac{1}{5!}(i\theta)^5+\cdots+\frac{1}{(2n)!}(i\theta)^{2n}+\frac{1}{(2n+1)!}(i\theta)^{2n+1}\\
&=\left(1-\frac{1}{2!}\theta^2+\frac{1}{4!}\theta^4-\cdots+(-1)^n\frac{1}{(2n)!}\theta^{2n}\right)\\
&\quad+i\left(\theta-\frac{1}{3!}\theta^3+\frac{1}{5!}\theta^5-\cdots+(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}\theta^{2n+1}\right)\\
&\to\cos\theta+i\sin\theta\quad(n\to+\infty).
\end{aligned}$$

ゆえに

$$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$$

(3) 数学に登場する重要な値「0,1,π,e, i」を結びつける等式として知られる, 世界で最も美しい等式

$$e^{i\pi}+1=0$$

を証明せよ.

解答例　オイラーの公式より

$$e^{i\pi}=\cos\pi+i\sin\pi=-1+0i=-1$$

よって -1 を移項して

$$e^{i\pi}+1=0$$

を得る.