微分方程式II・自習シート

問 1　A を $n \times n$ 行列とする. 以後, 行列を

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

とかくことにする. 行列 A の数値化として

$$\|A\| := \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2}$$

を定義する (A のフロベニウスノルムと呼ぶことがある). このとき次の問いに答えよ.

(1) 次の行列 A, B, I に対して $\|A\|$, $\|B\|$, $\|I\|$ の値をそれぞれ求めよ.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 10 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

解答例

$$\|A\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 8^2 + 10^2} = \sqrt{169} = 13$$
$$\|B\| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 0^2 + 1^2 + 2^2 + 1^2 + 0^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{16} = 4$$
$$\|I\| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

(2) 任意の $n \times n$ 行列 A と任意の実数 $t \in \mathbb{R}$ に対して

$$\|tA\| = |t|\|A\|$$

が成立することを証明せよ. 書き始めは以下を参考にせよ.

提出する場合は, 解答例を参考にして自分で採点をしておくこと. 提出しなくても試験で 60 点以上取れば合格です.

解答例

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= \|tA\| \\
&= \left\| t \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & & a_{nn} \end{bmatrix} \right\| \\
&= \left\| \begin{bmatrix} ta_{11} & ta_{12} & \cdots & ta_{1n} \\ ta_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ ta_{n1} & \cdots & & ta_{nn} \end{bmatrix} \right\| \\
&= \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} |ta_{ij}|^2} \\
&= \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} |t|^2 |a_{ij}|^2} \\
&= |t| \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2} \\
&= |t| \|A\| = (\text{右辺})
\end{aligned}
$$

よって成立. □

(3) 任意の $n \times n$ 行列 A, B に対して次の劣加法性 (三角不等式) が成立することを証明せよ.

$$\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$$

ただし, シュワルツの不等式[1)]を用いてもよい. 書き始めは以下を参考にせよ.

---

1)

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} b_{ij} \leq \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \text{もしくは} \quad \left(\sum_{k=1}^{n} A_k B_k \right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} A_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^{n} B_k^2 \right)$$

解答例　$\|A+B\|^2 \leq (\|A\|+\|B\|)^2$ を示す.

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺})^2 &= \|A+B\|^2 \\
&= \left\| \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & & a_{nn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & & b_{nn} \end{bmatrix} \right\|^2 \\
&= \left\| \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1}+b_{n1} & \cdots & & a_{nn}+b_{nn} \end{bmatrix} \right\|^2 \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}+b_{ij}|^2 \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}+b_{ij})^2 \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \left(a_{ij}^2 + 2a_{ij}b_{ij} + b_{ij}^2\right) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2 + 2\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}b_{ij} + \sum_{i,j=1}^{n} |b_{ij}|^2 \\
&\leq \|A\|^2 + 2\left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}} + \|B\|^2 \qquad (\text{ここでシュワルツの不等式}) \\
&= \|A\|^2 + 2\|A\|\|B\| + \|B\|^2 \\
&= (\|A\|+\|B\|)^2 = (\text{右辺})^2
\end{aligned}
$$

よって, $\|A+B\| \leq \|A\|+\|B\|$ が成立.　□

(4) 任意の $n \times n$ 行列 A, B に対して次の劣乗法性が成立することを証明せよ.

$$\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$$

ただし, シュワルツの不等式を用いてもよい.

解答例

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= \|AB\| \\
&= \left\| \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & & b_{nn} \end{bmatrix} \right\| \\
&= \left\| \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^n a_{1k}b_{k1} & \sum_{k=1}^n a_{1k}b_{k2} & \cdots & \sum_{k=1}^n a_{1k}b_{kn} \\ \sum_{k=1}^n a_{2k}b_{k1} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ \sum_{k=1}^n a_{nk}b_{k1} & \cdots & & \sum_{k=1}^n a_{nk}b_{kn} \end{bmatrix} \right\| \\
&= \sqrt{\sum_{i,j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj} \right)^2} \\
&\leq \sqrt{\sum_{i,j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n a_{ik}^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n b_{kj}^2 \right)} \\
&= \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n a_{ik}^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n b_{kj}^2 \right)} \\
&= \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^n a_{ik}^2 \right)} \sqrt{\sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n b_{kj}^2 \right)} \\
&= \|A\|\|B\| = (\text{右辺})
\end{aligned}
$$

よって成立. □