2023/09/21/No.2

微分方程式II・自習シート

問 1　一般項が次の様に与えられた数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ の 0 への収束を ε-N 論法で証明せよ.

(1) $a_n := \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

解答例

> 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある自然数 $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ が存在して, $n \geq N_\varepsilon$ を満たす任意の自然数 n に対して
> $$\left|\frac{1}{\sqrt{n}} - 0\right| < \varepsilon$$
> を示せばよい (それが定義だから). そこで先に
> $$\left|\frac{1}{\sqrt{n}} - 0\right| = \frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon$$
> となる番号を見積もっておくと
> $$\frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon,$$
> $$\frac{1}{\varepsilon^2} < n$$
> となる番号であればよい.

$\varepsilon > 0$ とする. アルキメデスの原理[1)]より, ある自然数 $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ が存在して

$$\frac{1}{\varepsilon^2} < N_\varepsilon.$$

このとき, $n \geq N_\varepsilon$ を満たす任意の自然数 n に対して

$$\frac{1}{\varepsilon^2} < N_\varepsilon \leq n$$

より

$$\frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon.$$

よって,

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{\sqrt{n}} - 0\right| &= \frac{1}{\sqrt{n}} \\ &< \varepsilon.\end{aligned}$$

以上により

$$a_n \to 0 \quad (n \to +\infty).$$

提出する場合は, 解答例を参考にして自分で採点をしておくこと. 提出しなくても試験で 60 点以上取れば合格です.

[1)] 自然数は上に有界でないという性質

(2) $a_n := \dfrac{1}{2^n}$

解答例

任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある自然数 $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ が存在して, $n \geq N_\varepsilon$ を満たす任意の自然数 n に対して

$$\left|\frac{1}{2^n} - 0\right| < \varepsilon$$

を示せばよい. そこで先に

$$\left|\frac{1}{2^n} - 0\right| < \varepsilon$$

となる番号を見積もっておくと

$$\begin{aligned} \left|\frac{1}{2^n} - 0\right| &= \frac{1}{2^n} \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

となる番号であればよい.

$\varepsilon > 0$ とする. アルキメデスの原理より, ある自然数 $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ が存在して

$$\log_2\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) < N_\varepsilon.$$

このとき, $n \geq N_\varepsilon$ を満たす任意の自然数 n に対して

$$\log_2\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \leq N_\varepsilon \leq n$$

より

$$\frac{1}{\varepsilon} < 2^n,$$

つまり

$$\frac{1}{2^n} < \varepsilon.$$

よって,

$$\begin{aligned} \left|\frac{1}{2^n} - 0\right| &= \frac{1}{2^n} \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

以上により

$$a_n \to 0 \quad (n \to +\infty).$$

別解

任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある自然数 $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ が存在して, $n \geq N_\varepsilon$ を満たす任意の自然数 n に対して

$$\left|\frac{1}{2^n} - 0\right| < \varepsilon$$

を示せばよい. そこで先に

$$\left|\frac{1}{2^n} - 0\right| < \varepsilon$$

となる番号を見積もっておくと, 自然数 n に対して常に $n < 2^n$ より

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{2^n} - 0\right| &= \frac{1}{2^n} \\ &< \frac{1}{n} \\ &< \varepsilon\end{aligned}$$

となる番号であればよい.

$\varepsilon > 0$ とする. アルキメデスの原理より, ある自然数 $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ が存在して

$$\frac{1}{\varepsilon} < N_\varepsilon.$$

このとき, $n \geq N_\varepsilon$ を満たす任意の自然数 n に対して

$$\frac{1}{\varepsilon} < N_\varepsilon \leq n$$

より

$$\frac{1}{n} < \varepsilon.$$

よって, $n \geq N_\varepsilon$ を満たす任意の自然数 n に対して

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{2^n} - 0\right| &= \frac{1}{2^n} \\ &< \frac{1}{n} \\ &< \varepsilon.\end{aligned}$$

以上により

$$a_n \to 0 \quad (n \to +\infty).$$

(3) $a_n := \dfrac{1}{n}\sin n$

解答例

任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある自然数 $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ が存在して, $n \geq N_\varepsilon$ を満たす任意の自然数 n に対して

$$\left|\frac{1}{n}\sin n - 0\right| < \varepsilon$$

を示せばよい. そこで先に

$$\left|\frac{1}{n}\sin n - 0\right| < \varepsilon$$

となる番号を見積もっておくと, 自然数 n に対して常に $|\sin n| \leq 1$ より

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{n}\sin n - 0\right| &= \frac{1}{n}|\sin n| \\ &< \frac{1}{n} \\ &< \varepsilon\end{aligned}$$

となる番号であればよい.

$\varepsilon > 0$ とする. アルキメデスの原理より, ある自然数 $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ が存在して

$$\frac{1}{\varepsilon} < N_\varepsilon.$$

このとき, 任意の $n \geq N_\varepsilon$ を満たす任意の自然数 n に対して

$$\frac{1}{\varepsilon} < N_\varepsilon \leq n$$

より

$$\frac{1}{n} < \varepsilon.$$

よって,

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{n}\sin n - 0\right| &= \frac{1}{n}|\sin n| \\ &< \frac{1}{n} \\ &< \varepsilon.\end{aligned}$$

以上により

$$a_n \to 0 \quad (n \to +\infty).$$