2024/01/16/No.12

微分方程式II・自習シート

問 1　$\boldsymbol{x}(t) :=^{\mathsf{T}} (x(t), y(t))$ を未知関数とし, 次の微分方程式を考える.

$$\boldsymbol{x}'(t) = A\boldsymbol{x}(t)$$

ここで, A を次のような対角行列とする. ただし, $\lambda_+, \lambda_- \in \mathbb{R}$ で, $\lambda_+ > \lambda_1$ とする.

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_+ & 0 \\ 0 & \lambda_- \end{pmatrix}$$

(1) e^{tA} を計算せよ. また e^{tA} を用いて, 微分方程式の一般解が定数 C_1, C_2 を用いて

$$x(t) = C_1 e^{\lambda_+ t}, \quad y(t) = C_2 e^{\lambda_- t}$$

となることを示せ.

解答例

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_+ t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_- t} \end{pmatrix}$$

より

$$\boldsymbol{x}(t) = e^{tA} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$$

すなわち

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_+ t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_- t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$$

よって

$$x(t) = C_1 e^{\lambda_+ t}, \quad y(t) = C_2 e^{\lambda_- t}$$

(2) $\lambda_- < \lambda_+ < 0$ とする. このとき,

$$y(t) = C_2 \left(\frac{1}{C_1} x(t) \right)^{\frac{\lambda_-}{\lambda_+}}$$

が得られることを計算せよ. またこの関係を用いて xy-平面に解曲線をかけ. ただし, 解答例を参考に C_1, C_2 の符号で場合分けして同じグラフに書き込め. また発展の向きが分かるように矢印を書け.

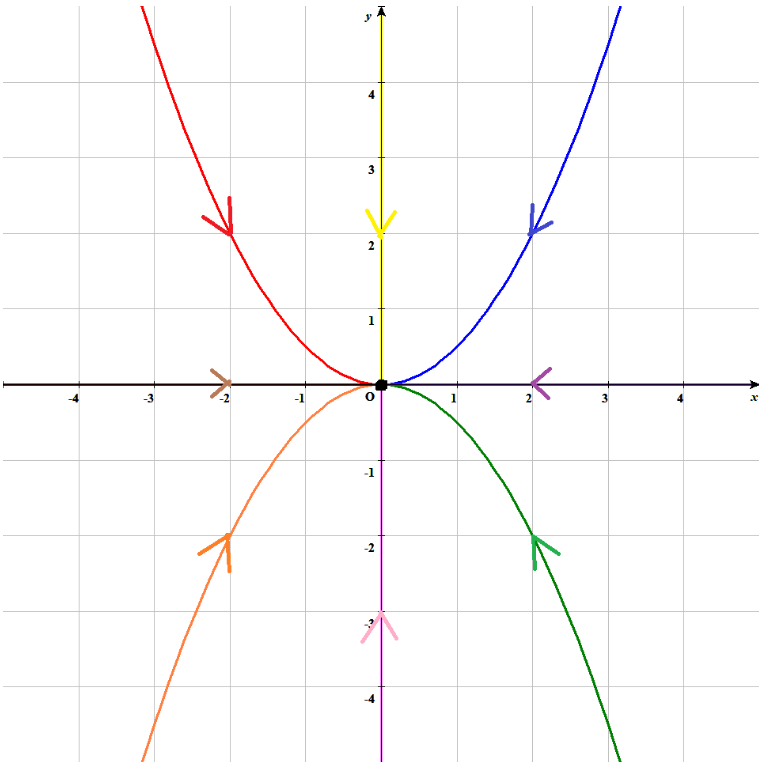
提出する場合は, 解答例を参考にして自分で採点をしておくこと. 提出しなくても試験で 60 点以上取れば合格です.

解答例

$$x(t) = C_1 e^{\lambda_+ t}, \quad y(t) = C_2 e^{\lambda_- t}$$

より

$$\begin{aligned} y(t) &= C_2 e^{\lambda_- t} \\ &= C_2 (e^{\lambda_+ t})^{\frac{\lambda_-}{\lambda_+}} \\ &= C_2 \left(\frac{1}{C_1} x(t) \right)^{\frac{\lambda_-}{\lambda_+}} \end{aligned}$$



$C_1 > 0,\ C_2 > 0$ のとき 青

$C_1 < 0,\ C_2 > 0$ のとき 赤

$C_1 < 0,\ C_2 < 0$ のとき オレンジ

$C_1 > 0,\ C_2 < 0$ のとき 緑

$C_1 = 0,\ C_2 > 0$ のとき 黄

$C_1 = 0,\ C_2 < 0$ のとき ピンク

$C_1 > 0,\ C_2 = 0$ のとき 紫

$C_1 < 0,\ C_2 = 0$ のとき 茶

$C_1 = 0,\ C_2 = 0$ のとき 黒