微分方程式II・自習シート

問 1　次の連立微分方程式に対して e^{tA} を用いる方法で一般解を求めよ.

(1)

$$\begin{cases} x'(t) = & -y(t) \\ y'(t) = & x(t) \end{cases}$$

解答例

$$\boldsymbol{x}(t) := \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \quad A := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

とおくと (1) は

$$\boldsymbol{x}'(t) = A\boldsymbol{x}(t)$$

とかける. そこで

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0$$

より, 固有値は $\lambda = \pm i$ [1]. $\lambda = i$ のとき固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

より $-iv_1 - v_2 = 0$ から

$$\boldsymbol{v} = t \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \quad ({}^{\forall} t \in \mathbb{C}; t \neq 0)$$

例えば

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} i =: \boldsymbol{p} + \boldsymbol{q}i$$

は対応する固有ベクトルとなる. 以上より例えば

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

によって

$$e^{tA} = Q \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} Q^{-1}$$

となるので, 一般解は

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}.$$

□

提出する場合は, 解答例を参考にして自分で採点をしておくこと. 提出しなくても試験で 60 点以上取れば合格です.

[1] $i - i = 0 = \mathrm{tr}A = 0 + 0$ より確かに正しそう.

(2)

$$\begin{cases} x'(t) = & 2y(t) \\ y'(t) = & x(t) - y(t) \end{cases}$$

解答例

$$\boldsymbol{x}(t) := \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \quad A := \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

とおくと (2) は

$$\boldsymbol{x}'(t) = A\boldsymbol{x}(t)$$

とかける. そこで

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} &= -\lambda(-1-\lambda) - 2 \\ &= \lambda(\lambda+1) - 2 \\ &= \lambda^2 + \lambda - 2 \\ &= (\lambda+2)(\lambda-1) = 0 \end{aligned}$$

より, 固有値は $\lambda = 1, -2$ [2]. $\lambda = 1$ のとき固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

より $v_1 - 2v_2 = 0$ から

$$\boldsymbol{v} = t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ({}^{\forall} t \in \mathbb{R}; t \neq 0).$$

$\lambda = -2$ のとき固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

より $v_1 + v_2 = 0$ から

$$\boldsymbol{v} = t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad ({}^{\forall} t \in \mathbb{R}; t \neq 0).$$

以上より例えば

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

によって

$$e^{tA} = P \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{pmatrix} P^{-1}$$

となるので, 一般解は

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}.$$

□

[2] $1 - 2 = -1 = \mathrm{tr}A = 0 - 1$ より確かに正しそう.