微分方程式II・自習シート

問 1　A の固有値と固有ベクトルを求め，さらに e^{tA} を求めよ (ただし各正則行列 P, Q, R およびその逆行列は一例なのでそのままでよい).

(1)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

解答例

$$\begin{aligned}\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 4 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} &= (3-\lambda)(1-\lambda)-8 \\ &= (\lambda-3)(\lambda-1)-8 \\ &= \lambda^2-4\lambda-5 \\ &= (\lambda+1)(\lambda-5)=0\end{aligned}$$

より，固有値は $\lambda = -1, 5$ [1]. $\lambda = -1$ のとき固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

より $2v_1 + 2v_2 = 0$ から

$$\boldsymbol{v} = t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad ({}^\forall t \in \mathbb{R}; t \neq 0)$$

は対応する固有ベクトルとなる．$\lambda = 5$ のとき固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

より $2v_1 - 4v_2 = 0$ から

$$\boldsymbol{v} = t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ({}^\forall t \in \mathbb{R}; t \neq 0)$$

は対応する固有ベクトルとなる．以上より例えば

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

によって A は

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

提出する場合は，解答例を参考にして自分で採点をしておくこと．提出しなくても試験で 60 点以上取れば合格です．

[1] $-1+5=4=\mathrm{tr}A=3+1$ より確かに正しそう．

に対角化できる．つまり

$$A = P \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} P^{-1}$$

と変形できる．よって

$$e^{tA} = P \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{5t} \end{pmatrix} P^{-1}$$

□

(2)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

解答例

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ -1 & 4-\lambda \end{vmatrix} &= (2-\lambda)(4-\lambda) + 1 \\ &= (\lambda - 2)(\lambda - 4) + 1 \\ &= \lambda^2 - 6\lambda + 9 \\ &= (\lambda - 3)^2 = 0 \end{aligned}$$

より, 固有値は $\lambda = 3$ [2]．$\lambda = 3$ のとき固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

より $-v_1 + v_2 = 0$ から

$$\boldsymbol{v} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ({}^\forall t \in \mathbb{R}; t \neq 0)$$

は対応する固有ベクトルとなる．また $(A - 3I)\boldsymbol{w} = \boldsymbol{v}$ を満たす $\boldsymbol{w}$ として

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

を解くと, 例えば $-w_1 + w_2 = 1$ より

$$\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

が選べる．以上より例えば

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

によって A は

$$R^{-1}AR = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

[2] $3 + 3 = 6 = \mathrm{tr}A = 2 + 4$ より確かに正しそう．

に変形できる. つまり

$$A = R\begin{pmatrix}3 & 1\\0 & 3\end{pmatrix}R^{-1}$$

と変形できる. よって

$$e^{tA} = e^{3t}R\begin{pmatrix}1 & t\\0 & 1\end{pmatrix}R^{-1} \quad \left(= R\begin{pmatrix}e^{3t} & te^{3t}\\0 & e^{3t}\end{pmatrix}R^{-1}\text{ でもよい}\right).$$

□

(3)

$$A = \begin{pmatrix}3 & -2\\4 & -1\end{pmatrix}$$

解答例

$$\begin{aligned}\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix}3-\lambda & -2\\4 & -1-\lambda\end{vmatrix} &= (3-\lambda)(-1-\lambda)+8\\&= (\lambda-3)(\lambda+1)+8\\&= \lambda^2-2\lambda+5\\&= 0\end{aligned}$$

より, 固有値は $\lambda = 1 \pm 2i$ [3]. $\lambda = 1+2i$ のとき固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix}2-2i & -2\\4 & -2-2i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

より $(2-2i)v_1 - 2v_2 = 0$ から $(1-i)v_1 - v_2 = 0$

$$\boldsymbol{v} = t\begin{pmatrix}1\\1-i\end{pmatrix} = t\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + ti\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix} \quad ({}^{\forall}t \in \mathbb{R}; t \neq 0)$$

は対応する固有ベクトルとなる. $\lambda = 1-2i$ のとき固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix}2+2i & -2\\4 & -2+2i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

より $(2+2i)v_1 - 2v_2 = 0$ から $(1+i)v_1 - v_2 = 0$

$$\boldsymbol{v} = t\begin{pmatrix}1\\1+i\end{pmatrix} = t\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} - ti\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix} \quad ({}^{\forall}t \in \mathbb{R}; t \neq 0)$$

は対応する固有ベクトルとなる. 以上より例えば

$$Q = \begin{pmatrix}1 & 0\\1 & -1\end{pmatrix}$$

によって A は

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix}1 & 2\\-2 & 1\end{pmatrix}$$

[3] $(1+2i)+(1-2i) = 2 = \mathrm{tr}A = 3-1$ より確かに正しそう.

に変形できる．つまり

$$A = e^t Q \begin{pmatrix} \cos 2t & \sin 2t \\ -\sin 2t & \cos 2t \end{pmatrix} Q^{-1}$$

と変形できる．よって

$$e^{tA} = e^t Q \begin{pmatrix} \cos 2t & \sin 2t \\ -\sin 2t & \cos 2t \end{pmatrix} Q^{-1} \quad \left(= Q \begin{pmatrix} e^t \cos 2t & e^t \sin 2t \\ -e^t \sin 2t & e^t \cos 2t \end{pmatrix} Q^{-1} \text{ でもよい} \right).$$

□

問 2　[定数変化法] 次の微分方程式を手順に従って解け．

$$x'(t) = \frac{1}{t} x(t) + \log t \tag{1}$$

(i) 補助的に

$$x'(t) = \frac{1}{t} x(t)$$

を解き, 一般解が $x(t) = Ct$ となることを確かめよ．

解答例　$x \neq 0$ ならば

$$\begin{aligned} \frac{1}{x}\frac{dx}{dt} &= \frac{1}{t}, \\ \int \frac{1}{x}\frac{dx}{dt} dt &= \int \frac{1}{t} dt, \\ \log |x| &= \log |t| + C_1, \\ \log |x| - \log |t| &= C_1, \\ \log \left| \frac{x}{t} \right| &= C_1, \\ \left| \frac{x}{t} \right| &= e^{C_1}, \\ \frac{x}{t} &= \pm e^{C_1} =: C, \\ x &= Ct. \end{aligned}$$

$x = 0$ も解だが, 上の形で $C = 0$ とすれば表現できる．よって一般解は

$$x = x(t) = Ct.$$

(ii) (i) で得られた一般解 $x(t) = Ct$ の定数 C を t の関数 $C(t)$ と見なし,

$$x(t) = C(t)t$$

の両辺を t について微分することで, **(1) を満たすためには**

$$C'(t) = \frac{\log t}{t} \tag{2}$$

を満たせば良いことを確かめよ．

解答例

$$x(t) = C(t)t$$

の両辺を t について微分すると

$$x'(t) = C'(t)t + C(t)$$

なのでこれと x を (1) に代入して (1) を C の微分方程式に変形すれば

$$C'(t)t + C(t) = \frac{1}{t}C(t)t + \log t,$$
$$C'(t) = \frac{\log t}{t}.$$

(iii) (ii) で得られた $C(t)$ の微分方程式 (2) をとき, (1) の一般解を求めよ.

解答例

$$C'(t) = \frac{\log t}{t}$$

を解くと,

$$\frac{dC}{dt} = \frac{\log t}{t},$$
$$\int \frac{dC}{dt}dt = \int \frac{\log t}{t},$$
$$\int dC = \int \log t \frac{1}{t}dt.$$

ここで, 右辺については $g = \log t$ とおくと $dg = (1/t)dt$ で (置換積分)

$$C = \int g dg = \frac{1}{2}g^2 + C_0,$$
$$C = \frac{1}{2}(\log t)^2 + C_0.$$

よって

$$x(t) = \left(\frac{1}{2}(\log t)^2 + C_0\right)t$$

が元の方程式の一般解となる. □

問 3 [定数変化法] $a \in \mathbb{R}$, $f(t)$ を与えられた関数とする. 次の微分方程式を手順に従って解け.

$$x'(t) = ax(t) + f(t) \tag{3}$$

(i) 補助的に

$$x'(t) = ax(t)$$

を解き, 一般解が $x(t) = Ce^{at}$ となることを確かめよ.

解答例　$x \neq 0$ ならば

$$\frac{1}{x}\frac{dx}{dt} = a,$$
$$\int \frac{1}{x}\frac{dx}{dt}dt = \int a dt,$$
$$\log|x| = at + C_1,$$
$$|x| = e^{at+C_1} = e^{at}e^{C_1},$$
$$x = \pm e^{C_1}e^{at},$$
$$x = Ce^{at}.$$

$x = 0$ も解だが, 上の形で $C = 0$ とすれば表現できる. よって一般解は

$$x = x(t) = Ce^{at}.$$

(ii) (i) で得られた一般解 $x(t) = Ce^{at}$ の定数 C を t の関数 $C(t)$ と見なし,

$$x(t) = C(t)e^{at}$$

の両辺を t について微分することで, **(3) を満たすためには**

$$C'(t) = e^{-at}f(t) \tag{4}$$

を満たせば良いことを確かめよ.

解答例

$$x(t) = C(t)e^{at}$$

の両辺を t について微分すると

$$x'(t) = C'(t)e^{at} + C(t)ae^{at}$$

なのでこれと x を (4) に代入して (3) を C の微分方程式に変形すれば

$$C'(t)e^{at} + C(t)ae^{at} = aC(t)e^{at} + f(t),$$
$$C'(t) = e^{-at}f(t).$$

(iii) (ii) で得られた $C(t)$ の微分方程式 (4) の両辺を $[0,t]$ で積分することで, (3) の一般解が

$$x(t) = C_0e^{at} + \int_0^t e^{a(t-s)}f(s)ds$$

であることを示せ (ただし $C(0) = C_0$).

解答例

$$C'(t) = e^{-at}f(t)$$

の両辺を $[0,t]$ で積分すると (積分する前に $C'(s) = e^{-as}f(s)$ と文字を変えておく)

$$\int_0^t C'(s)ds = \int_0^t e^{-as}f(s)ds,$$
$$C(t) - C(0) = \int_0^t e^{-as}f(s)ds,$$
$$C(t) = C_0 + \int_0^t e^{-as}f(s)ds.$$

よって

$$\begin{aligned} x(t) &= \left(C_0 + \int_0^t e^{-as} f(s) ds\right) e^{at} \\ &= C_0 e^{at} + \int_0^t e^{a(t-s)} f(s) ds \end{aligned}$$

が元の方程式の一般解となる. □

(iv)

$$\begin{cases} x'(t) = ax(t) + f(t), \quad (t > 0) \\ x(0) = x_0 \quad (t = 0) \end{cases}$$

の特解は

$$x(t) = e^{at} x_0 + \int_0^t e^{a(t-s)} f(s) ds$$

で求められることを示せ.

解答例　(iii) より一般解は

$$x(t) = C_0 e^{at} + \int_0^t e^{a(t-s)} f(s) ds$$

なので, 後は C_0 を求めればよい. $t = 0$ を代入すると

$$\begin{aligned} x(0) &= C_0 e^{a0} + \int_0^0 e^{a(0-s)} f(s) ds \\ &= C_0 + 0. \end{aligned}$$

よって, 初期条件 $x(0) = x_0$ より $C_0 = x_0$ が得られるので特解は

$$x(t) = e^{at} x_0 + \int_0^t e^{a(t-s)} f(s) ds$$

で求められる. □