2023/10/19

微分方程式II・補助シート

この補助シートでは, 正方行列 A, B が $AB = BA$ を満たすとき,

$$e^A e^B = e^{A+B}$$

を, 講義で証明した方法の別解として行列のノルムの評価 (不等式) から導く. さらに B が逆行列を持つとき

$$Be^A B^{-1} = e^{BAB^{-1}}$$

を満たすことを講義のように行列のノルムの評価 (不等式) から導かず形式的な別解法を解説する.

自習シート No.5 の問題からも分かるが,

$$e^{A+B}$$

の第 $n+1$ 項までの和 S_n は [1)]

$$\begin{aligned}
S_n &:= I + (A+B) + \frac{1}{2!}(A+B)^2 + \frac{1}{3!}(A+B)^3 + \frac{1}{4!}(A+B)^4 + \cdots + \frac{1}{n!}(A+B)^n \\
&= I\big(I + B + \frac{1}{2!}B^2 + \frac{1}{3!}B^3 + \cdots + \frac{1}{(n-2)!}B^{n-2} + \frac{1}{(n-1)!}B^{n-1} + \frac{1}{n!}B^n\big) \\
&\quad + A\big(I + B + \frac{1}{2!}B^2 + \frac{1}{3!}B^3 + \cdots + \frac{1}{(n-2)!}B^{n-2} + \frac{1}{(n-1)!}B^{n-1}\big) \\
&\quad + \frac{1}{2!}A^2\big(I + B + \frac{1}{2!}B^2 + \frac{1}{3!}B^3 + \cdots + \frac{1}{(n-2)!}B^{n-2}\big) \\
&\quad \cdots \\
&\quad + \frac{1}{(n-1)!}A^{n-1}\big(I + B\big) \\
&\quad + \frac{1}{n!}A^n I
\end{aligned}$$

1) ここで二項定理

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k A^{n-k} B^k$$

の係数に $1/(n!)$ がかけられると

$$\frac{1}{n!}\,{}_n\mathrm{C}_k = \frac{1}{n!}\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{1}{k!(n-k)!}$$

となるので,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n!}(A+B)^n &= \frac{1}{n!}(A^n + nA^{n-1}B + {}_n\mathrm{C}_2 A^{n-2}B^2 + \cdots {}_n\mathrm{C}_k A^{n-k}B^k + \cdots + nA^1B^{n-1} + B^n) \\
&= \frac{1}{n!}A^n + \frac{1}{(n-1)!}A^{n-1}\frac{1}{1!}B + \frac{1}{(n-2)!}A^{n-2}\frac{1}{2!}B^2 + \cdots + + \frac{1}{(n-k)!}A^{n-k}\frac{1}{k!}B^k \\
&\quad + \cdots + \frac{1}{1!}A^1\frac{1}{(n-1)!}B^{n-1} + \frac{1}{n!}B^n
\end{aligned}$$

となることに注意する.

である．この行列は $n \to +\infty$ のとき e^{A+B} に収束する．一方で

$$
\begin{aligned}
T_n &:= \bigl(I + A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \cdots + \frac{1}{n!}A^n\bigr)\bigl(I + B + \frac{1}{2!}B^2 + \frac{1}{3!}B^3 + \cdots + \frac{1}{n!}B^n\bigr) \\
&= I\bigl(I + B + \frac{1}{2!}B^2 + \frac{1}{3!}B^3 + \cdots + \frac{1}{(n-2)!}B^{n-2} + \frac{1}{(n-1)!}B^{n-1} + \frac{1}{n!}B^n\bigr) \\
&\quad + A\bigl(I + B + \frac{1}{2!}B^2 + \frac{1}{3!}B^3 + \cdots + \frac{1}{(n-2)!}B^{n-2} + \frac{1}{(n-1)!}B^{n-1} + \frac{1}{n!}B^n\bigr) \\
&\quad + \frac{1}{2!}A^2\bigl(I + B + \frac{1}{2!}B^2 + \frac{1}{3!}B^3 + \cdots + \frac{1}{(n-2)!}B^{n-2} + \frac{1}{(n-1)!}B^{n-1} + \frac{1}{n!}B^n\bigr) \\
&\quad \cdots \\
&\quad + \frac{1}{(n-1)!}A^{n-1}\bigl(I + B + \frac{1}{2!}B^2 + \frac{1}{3!}B^3 + \cdots + \frac{1}{(n-2)!}B^{n-2} + \frac{1}{(n-1)!}B^{n-1} + \frac{1}{n!}B^n\bigr) \\
&\quad + \frac{1}{n!}A^n\bigl(I + B + \frac{1}{2!}B^2 + \frac{1}{3!}B^3 + \cdots + \frac{1}{(n-2)!}B^{n-2} + \frac{1}{(n-1)!}B^{n-1} + \frac{1}{n!}B^n\bigr)
\end{aligned}
$$

について考えると S_n と T_n の形から同じ行列 X に収束することが分かる．よって

$$
\begin{aligned}
\|e^A e^B - e^{A+B}\| &= \|e^A e^B - T_n + T_n - S_n + S_n - e^{A+B}\| \\
&\le \|e^A e^B - T_n\| + \|T_n - S_n\| + \|S_n - e^{A+B}\| \\
&\to 0 \quad (n \to \infty).
\end{aligned}
$$

よって, $e^A e^B = e^{A+B}$ を得る [2)].

B が逆行列を持つとき

$$Be^A B^{-1} = e^{BAB^{-1}}$$

を形式的に導く.

$$(BAB^{-1})^2 = BAB^{-1}BAB^{-1} = BA^2B^{-1}$$

$$(BAB^{-1})^3 = (BAB^{-1})^2 BAB^{-1} = BA^2B^{-1}BAB^{-1} = BA^3B^{-1}$$

より, 一般化して

$$(BAB^{-1})^n = BA^nB^{-1}$$

なので

$$
\begin{aligned}
Be^A B^{-1} &= B\bigl(I + A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \cdots + \frac{1}{n!}A^n + \cdots\bigr)B^{-1} \\
&= BIB^{-1} + BAB^{-1} + \frac{1}{2!}(BAB^{-1})^2 + \frac{1}{3!}(BAB^{-1})^3 + \cdots + \frac{1}{n!}(BAB^{-1})^n + \cdots \\
&= e^{BAB^{-1}}
\end{aligned}
$$

ここで, $BIB^{-1} = BB^{-1} = I$ を用いた.

[2)] この別解では級数の項の順序の入れ換えを用いていないことに注意する．有限和はいつでも入れ換え可能である．