2023/10/16

微分方程式II・補助シート ver.2

この補助シートでは $\mathbb{R}^d$ における収束点列とコーシー点列の同値性を証明する. $\{a_n\}$ を $\mathbb{R}^d$ の点列とする [1] [2].

定義 1. $a \in \mathbb{R}^d$ とする. $n \to +\infty$ のとき,

$$|a_n - a| \to 0$$

を満たす点列を収束点列と定義する. すなわち $\{a_n\}$ が収束点列であるとはすべての (任意の) $\varepsilon > 0$ に対して, ある自然数 N_ε が存在して, $n \geq N_\varepsilon$ を満たす, すべての (任意の) 自然数 n に対して

$$|a_n - a| < \varepsilon$$

を満たすことである. このとき a を $\{a_n\}$ の極限といい

$$a_n \to a \quad (n \to +\infty) \quad \text{や} \quad \lim_{n \to +\infty} a_n = a$$

とかく [3].

定義 2. $n, m \to +\infty$ のとき,

$$|a_n - a_m| \to 0$$

を満たす点列をコーシー点列と定義する. すなわち $\{a_n\}$ がコーシー点列であるとはすべての (任意の) $\varepsilon > 0$ に対して, ある自然数 N_ε が存在して, $n, m \geq N_\varepsilon$ を満たす, すべての (任意の) 自然数 n に対して

$$|a_n - a_m| < \varepsilon$$

を満たすことである [4].

---

[1] $x \in \mathbb{R}^d$ に対して, x の成分を $(x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(d)})$ とおき

$$|x| := \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x^{(k)}|^2} = \sqrt{|x^{(1)}|^2 + |x^{(2)}|^2 + \cdots + |x^{(d)}|^2}$$

と定義しておく.

[2] ver.2 では前半の部分で少し日本語の部分を書き換えているが本質的には ver.1 と同じ.

[3] 論理記号で書くと例えば, ${}^\forall\varepsilon > 0$, ${}^\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ s.t. ${}^\forall n \geq N_\varepsilon$, $|a_n - a| < \varepsilon$. 本質だけ抽出すると, 構造は以下の通り:

$$\boxed{\forall\varepsilon > 0 \ \boxed{\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \ \boxed{\forall n \geq N_\varepsilon \ \boxed{|a_n - a| < \varepsilon}}}}$$

[4] 論理記号で書くと例えば, ${}^\forall\varepsilon > 0$, ${}^\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ s.t. ${}^\forall n, m \geq N_\varepsilon$, $|a_n - a_m| < \varepsilon$. 本質だけ抽出すると, 構造は以下の通り:

$$\boxed{\forall\varepsilon > 0 \ \boxed{\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \ \boxed{\forall n, m \geq N_\varepsilon \ \boxed{|a_n - a_m| < \varepsilon}}}}$$

定理 3.　$\mathbb{R}^d$ において, 収束点列であることとコーシー点列であることは同値である [5].

証明するにあたり, ここでは,

$$P : \{a_n\} \text{ は収束点列}$$

$$Q : \{a_n\} \text{ はコーシー点列}$$

とそれぞれの命題を P, Q としておく

P ならば Q の証明　まず, $\{a_n\}$ を収束点列と仮定する. このとき, ある $a \in \mathbb{R}^d$ が存在して, $a_n \to a$ $(n \to +\infty)$ つまり, ε-N 論法で書けば $^\forall \varepsilon > 0$, $^\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ s.t. $^\forall n \geq N_\varepsilon$,

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

が成立している [6]. よって, すべての (任意の) $n, m \geq N_\varepsilon$ に対して [7]

$$\begin{aligned}
|a_n - a_m| &= |a_n - a + a - a_m| \\
&\leq |a_n - a| + |a - a_m| \\
&= |a_n - a| + |a_m - a| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

よって, $\{a_n\}$ はコーシー点列であると言える. □

Q ならば P の証明　まず, $\{a_n\}$ をコーシー点列と仮定する. この証明は 3 段階に分ける.

Step 1.　最初に $\{a_n\}$ は有界な点列 [8]であることを示す. コーシー列の定義から, $^\forall \varepsilon > 0$, $^\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ s.t. $^\forall n, m \geq N_\varepsilon$,

$$|a_n - a_m| < \varepsilon$$

---

[5] すなわち $\{a_n\}$ が収束点列ならばコーシー点列であり, 逆にコーシー点列であれば収束点列であることの両方が成立すると言うこと.

[6] なぜならば, 任意に $\varepsilon > 0$ を取ってきて, $\varepsilon/2$ なる数を考える. $\varepsilon/2 > 0$ なので, 収束の定義より, この $\varepsilon/2 > 0$ に対しても, ある自然数 N_ε が存在して, $n \geq N_\varepsilon$ を満たす, すべての (任意の) 自然数 n に対して

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

が言えるから. 最初に取ってくる半径の大きさは**任意**だったはず.

[7] まず, すべての (任意の) $x, y \in \mathbb{R}^d$ に対して $|x-y| = |y-x|$ であることに注意. 実際, x と同様に y の成分を $(y^{(1)}, y^{(2)}, \ldots, y^{(d)})$ とおくと

$$|x - y| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x^{(k)} - y^{(k)}|^2} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |y^{(k)} - x^{(k)}|^2} = |y - x|.$$

例えば, $|5-3| = 2$, $|3-5| = |-2| = 2$ のように $|x^{(k)} - y^{(k)}| = |y^{(k)} - x^{(k)}|$ であったことに注意. $n \geq N_\varepsilon$ を満たす, すべての (任意の) 自然数 n に対して

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

が成り立っていれば, すべての (任意の) 自然数 m に対して

$$|a_m - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

と書き換えても**まったく同じことを言っていることにも注意する**.

[8] すなわち, ある $M > 0$ が存在して, すべての (任意の) $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$|a_n| \leq M$$

を満たすこと. 大雑把に言えば, 「どの番号 n でも $-M < a_n < M$ だ」ということ.

を満たすので, もちろん $\varepsilon = 1$ のときであっても, $^{\exists}N_1 \in \mathbb{N}$ s.t. $^{\forall}n, m \geq N_1$,

$$|a_n - a_m| < 1$$

が成立する [9]. この式は, m は N_1 以上であれば必ず成立するので $m = N_1$ であっても成立する. つまり $^{\forall}n \geq N_1$,

$$|a_n - a_{N_1}| < 1$$

も成立する [10]. よって, $^{\forall}n \geq N_1$,

$$|a_n| = |a_n - a_{N_1} + a_{N_1}| \leq |a_n - a_{N_1}| + |a_{N_1}| < 1 + |a_{N_1}|$$

が成立している (この式を後で使う). そこで, 次のような考察をしてみる. 定数 M を

$$M := \max\{|a_1|, |a_2|, |a_3|, \ldots, |a_{N_1-1}|, |a_{N_1}| + 1\}$$

とおく [11]. すると

$$|a_1| \leq M$$

が成立する [12] 同じく,

$$|a_2| \leq M$$

も

$$|a_3| \leq M$$

も成立する. これを $N_1 - 1$ 番目まで繰り返して

$$|a_{N_1-1}| \leq M$$

が成立する. また先の考察から $n \geq N_1$ 以降のすべての自然数に対しても

$$|a_n| < 1 + |a_{N_1}| \leq M$$

が成立する. これによって, **すべての**自然数 $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$|a_n| \leq M$$

が成立していることが証明できた. つまり $\{a_n\}$ は有界な点列である. □

Step 2. 次のボルツァノ・ワイエルシュトラスの定理を思い出す.

> $\mathbb{R}^d$ の有界な点列は収束する部分列を持つ.

これはどういう定理かというと, 通常, 収束点列は有界な点列であることが Step 1 のように証明することができる. しかし, 逆は一般には成立せず「有界な点列だからといって必ずしも収束する」とは言えない. これに部分的に答える定理がボルツァノ・ワイエルシュトラスの定理である. $\{a_n\}$ が収束することは言えないが, $\{a_n\}$ から部分列を取ってこれば収束するようなものがあると主張している [13].

---

[9] $\varepsilon > 0$ は**任意**だったはず.

[10] $m \geq N_1$ は**任意**だったはず.

[11] つまり, M は $\{|a_1|, |a_2|, |a_3|, \ldots, |a_{N_1-1}|, |a_{N_1}| + 1\}$ のなかで一番大きな正の数.

[12] なぜなら M は $\{|a_1|, |a_2|, |a_3|, \ldots, |a_{N_1-1}|, |a_{N_1}| + 1\}$ のなかで一番大きな数だから. 例えば, $M := \max\{1, 2, 3\}$ ならば, $M = 3$ だが $1 \leq M$ も $2 \leq M$ も $3 \leq M$ も成立する.

[13] $\{a_n\}$ の部分列とは (1) $\{a_n\}$ の一部を選び出して, (2) 重複して使わずに (3) 並び順は変えずに (4) 無限に続くような点列を意味する. 例えば

$$a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \quad a_5 \quad a_6 \quad a_7 \quad a_8 \quad a_9 \quad \cdots$$

から

$$a_1 \quad a_2 \quad \quad a_4 \quad \quad \quad a_7 \quad a_8 \quad \quad \cdots$$

Step 3. $^\forall\varepsilon > 0$ に対して, $\{a_n\}$ はコーシー点列であったことから $^\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ s.t. $^\forall n, m \geq N_\varepsilon$,

$$|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

$\{a_n\}$ は有界な点列と分かったので, ボルツァノ・ワイエルシュトラスの定理より収束する部分列を持つ．そこで $\{a_n\}$ の部分列として収束する部分列 $\{a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \ldots, a_{n_k}, \ldots\}$ を選び, またその収束先を a とおく．このとき, おなじ $\varepsilon > 0$ に対して $^\exists K_\varepsilon \in \mathbb{N}$ s.t. $^\forall k \geq K_\varepsilon$,

$$|a_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

が成立している．最後に, $N := \max\{N_\varepsilon, K_\varepsilon\}$ とおくと, $n_N \geq N$ であることに注意して, もし $n \geq N$ であれば $n \geq N_\varepsilon$ かつ $n_N \geq N \geq K_\varepsilon$ なので以上より, $^\forall n \geq N_\varepsilon$,

$$\begin{aligned} |a_n - a| &= |a_n - a_{n_N} + a_{n_N} - a| \\ &\leq |a_n - a_{n_N}| + |a_{n_N} - a| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

ゆえに, $\{a_n\}$ は収束点列である． □

と $1, 2, 4, 7, 8, \ldots$ 番を選んだとする．

$$a_1, a_1, a_1, a_2, a_4, a_7, a_8, \ldots$$

は a_1 を何回も使っているから $\{a_n\}$ の部分列ではない ((2) に反する).

$$a_1, a_2, a_7, a_4, a_8, \ldots$$

は a_4 と a_7 の並び順を変えたから $\{a_n\}$ の部分列ではない ((3) に反する).

$$a_1, a_2, a_4, a_7.$$

は a_7 で終わってしまっているから $\{a_n\}$ の部分列ではない ((4) に反する).

最後に

$$\begin{array}{cccccc} a_1 & a_2 & a_4 & a_7 & a_8 & \cdots \\ \\ a_{n_1} & a_{n_2} & a_{n_3} & a_{n_4} & a_{n_5} & \cdots \end{array}$$

のように改めて番号 $1, 2, 3, \ldots, k, \ldots$ を振り直した数列 $\{a_{n_k}\}$(ただし k が 1 から順に動く) が $\{a_n\}$ の部分列である．このとき, すべての $k \in \mathbb{N}$ に対して $n_k \geq k$ が成立することに注意．例えば上の例なら $n_1 = 1$, $n_2 = 2$, $n_3 = 4 \geq 3$, $n_4 = 7 \geq 4$, $n_5 = 8 \geq 5$ のように, 部分列の第 k 項を示す k は, 対応するもとの数列の項の番号 n_k より小さい.