# 令和５年度 線形代数及び演習 II 小テスト対策プリント

＿＿＿＿＿＿ 課程 ＿＿＿＿＿＿ 年生　学籍番号 ＿＿＿＿＿＿ 名前 ＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{1}$ $V := \mathbb{R}^2$ とする．$\boldsymbol{u} \in V$ に対して

$$\|\boldsymbol{u}\| := \sqrt{u_1^2 + u_2^2} \quad \text{ただし，} \boldsymbol{u} = {}^{\mathsf{T}}(u_1, u_2)$$

と定義すると，$\|\cdot\|$ は $V$ のノルムになることを証明せよ．

**解答例**　ノルムの定義を満たすことを示す．
$\boldsymbol{u} = {}^{\mathsf{T}}(u_1, u_2), \boldsymbol{v} := {}^{\mathsf{T}}(v_1, v_2) \in V$, $c \in \mathbb{R}$ とする．
(i)

$$\|\boldsymbol{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} \geq 0.$$

特に，$\|\boldsymbol{u}\| = 0$ ならば，$u_1 = u_2 = 0$ よって $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$．逆に，$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$ のとき

$$\|\boldsymbol{u}\| = \sqrt{0^2 + 0^2} = 0$$

(よってノルムの第１条件を満たす．)
(ii) $c\boldsymbol{u} = {}^{\mathsf{T}}(cu_1, cu_2)$ に注意して

$$\begin{aligned}\|c\boldsymbol{u}\| &= \sqrt{(cu_1)^2 + (cu_2)^2} \\ &= \sqrt{c^2(u_1^2 + u_2^2)} \\ &= |c|\|\boldsymbol{u}\|.\end{aligned}$$

(よってノルムの第２条件を満たす．)
(iii) $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = {}^{\mathsf{T}}(u_1 + v_1, u_2 + v_2)$ に注意して

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}\|^2 &= (u_1 + v_1)^2 + (u_2 + v_2)^2 \\ &= u_1^2 + 2u_1v_1 + v_1^2 + u_2^2 + 2u_2v_2 + v_2^2 \\ &= (u_1^2 + u_2^2) + 2(u_1v_1 + u_2v_2) + (v_1^2 + v_2^2) \\ &\leq \|\boldsymbol{u}\|^2 + 2(\frac{1}{2}u_1^2v_1^2 + \frac{1}{2}u_2^2v_2^2) + \|\boldsymbol{v}\|^2 \\ &\leq \|\boldsymbol{u}\|^2 + \|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\| + \|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\| + \|\boldsymbol{v}\|^2 \\ &\leq (\|\boldsymbol{u}\| + \|\boldsymbol{v}\|)^2.\end{aligned}$$

つまり

$$\|\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}\| \leq \|\boldsymbol{u}\| + \|\boldsymbol{v}\|.$$

(よってノルムの第３条件を満たす.)
　以上より $\|\cdot\|$ は $V$ のノルムである．　□

**別解** (iii) において $\boxed{7}$ の補助定理 (シュワルツの不等式) より

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}\|^2 &= (u_1 + v_1)^2 + (u_2 + v_2)^2 \\ &= u_1^2 + 2u_1v_1 + v_1^2 + u_2^2 + 2u_2v_2 + v_2^2 \\ &= (u_1^2 + u_2^2) + 2(u_1v_1 + u_2v_2) + (v_1^2 + v_2^2) \\ &= \|\boldsymbol{u}\|^2 + 2(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) + \|\boldsymbol{v}\|^2 \\ &\leq \|\boldsymbol{u}\|^2 + 2|(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})| + \|\boldsymbol{v}\|^2 \\ &\leq \|\boldsymbol{u}\|^2 + 2\|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\| + \|\boldsymbol{v}\|^2 \\ &\leq (\|\boldsymbol{u}\| + \|\boldsymbol{v}\|)^2\end{aligned}$$

としてもよい．ただし，$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ は $V = \mathbb{R}^2$ の内積を意味する．

$\boxed{2}$ $V := \mathbb{R}^{n \times n}$，つまり $n$ 次正方行列とする．$A, B \in V$ に対して，

$$(A, B) := \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}b_{ij}$$

と定義すると $(\cdot, \cdot)$ は $V$ の内積になることを証明せよ．

**解答例**　内積の定義を満たすことを示す．$A, B, C \in V$, $c \in \mathbb{R}$ とする．
(i)

$$(A, A) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2 \geq 0.$$

特に $(A, A) = 0$ のとき，

$$(A, A) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2 = 0$$

となり，$a_{ij} = 0$ がすべての $i, j = 1, \cdots, n$ に対して成立する．よって $A = O$．逆に $A = O$ のとき，$a_{ij} = 0$ がすべての $i, j = 1, \cdots, n$ に対して成立する．よって

$$(A, A) = \sum_{i,j=1}^{n} 0^2 = 0.$$

(以上より内積の第１条件を満たす.)
(ii)

$$(A, B) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}b_{ij} = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}a_{ij} = (B, A).$$

(以上より内積の第２条件を満たす.)
(iii)

$$\begin{aligned}(A + B, C) &= \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij} + b_{ij})c_{ij} \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}c_{ij} + \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}c_{ij} \\ &= (A, C) + (B, C).\end{aligned}$$

(以上より内積の第３条件を満たす.)
(iv)

$$\begin{aligned}(cA, B) &= \sum_{i,j=1}^{n} (ca_{ij})b_{ij} \\ &= c\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}b_{ij} \\ &= c(A, B).\end{aligned}$$

(以上より内積の第４条件を満たす.)
(i) から (iv) より $(\cdot, \cdot)$ は $V$ の内積である．　□

$\boxed{3}$ $V := \mathbb{R}^3$ の内積を

$$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) := \sum_{k=1}^{3} u_k v_k$$

で定義する．ただし，$\boldsymbol{u} :={}^{\mathsf{T}}(u_1, u_2, u_3)$，$\boldsymbol{v} :={}^{\mathsf{T}}(v_1, v_2, v_3)$．次の元が直交するように実数 $a$ を定めよ．

$$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} a \\ a \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} a \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

**解答例**　$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = 0$ を満たせばよいので，

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) &= a \cdot a + a \cdot 4 + 1 \cdot 4 \\ &= a^2 + 4a + 4 \\ &= (a+2)^2 \\ &= 0.\end{aligned}$$

よって $a = -2$.

$\boxed{4}$ $V := \mathbb{R}[x]_2$ の内積を

$$(f, g) := \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$$

で定義する．次の元が直交するように実数 $a$ を定めよ．

$$f(x) = x^2 + 1, \quad g(x) := 5x^2 + a.$$

**解答例**　$(f, g) = 0$ を満たせばよいので，

$$\begin{aligned}(f, g) &= \int_{-1}^{1} (x^2+1)(5x^2+a)dx \\ &= \int_{-1}^{1} (5x^4 + (5+a)x^2 + a)dx \\ &= 2\int_{0}^{1} (5x^4 + (5+a)x^2 + a)dx \\ &= 2\left[x^5 + \frac{(5+a)}{3}x^3 + ax\right]_0^1 \\ &= 2\left\{1 + \frac{(5+a)}{3} + a\right\} \\ &= 2\left\{\frac{3 + (5+a) + 3a}{3}\right\} \\ &= 0.\end{aligned}$$

よって $4a + 8 = 0$ より $a = -2$.

$\boxed{5}$ $V := C([0, 2\pi])$ の内積を

$$(f, g) := \int_{0}^{2\pi} f(x)g(x)dx$$

で定義する．$\cos 2x \perp \cos x$ を示せ[1].

**解答例**　$f(x) = \cos 2x$, $g(x) = \cos x$ とおく．$(f, g) = 0$ を示せばよい．

$$\begin{aligned}(f, g) &= \int_{0}^{2\pi} \cos 2x \cos x dx \\ &= \int_{0}^{2\pi} \frac{1}{2}(\cos 3x + \cos x)dx \\ &= \int_{0}^{2\pi} \frac{1}{2}\cos 3x dx + \int_{0}^{2\pi} \frac{1}{2}\cos x dx \\ &= \frac{1}{2}\int_{0}^{2\pi} \cos 3x dx + \frac{1}{2}\int_{0}^{2\pi} \cos x dx \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}\sin 3x\right]_0^{2\pi} + \frac{1}{2}[\sin x]_0^{2\pi} \\ &= 0.\end{aligned}$$

よって，$(f, g) = 0$ なので，$\cos 2x \perp \cos x$. □

(必要に応じて裏面を使用してもよい)

[1]
$$\cos 2x \cos x = \frac{1}{2}(\cos 3x + \cos x)$$
を用いるとよい．

# 令和5年度 線形代数及び演習II 小テスト対策プリント

__________ 課程 __________ 年生　学籍番号 __________ 名前 ________________

$\boxed{6}$ 次の基底からシュミットの直交化によって正規直交基底を選び直せ.

(1)

$$\left\{\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}\right\}$$

(2)

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right\}$$

**解答例**　(1)

$$\boldsymbol{v}_1 := \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 := \begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$$

とおく.

**Step 1.** $\|\boldsymbol{v}_1\| = \sqrt{3^2+4^2} = 5$ より

$$\boldsymbol{u}_1 := \frac{1}{\|\boldsymbol{v}_1\|}\boldsymbol{v}_1 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}.$$

**Step 2.** $(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{u}_1) = (1/5)\{(-1)\cdot 3 + 2\cdot 4\} = 1$ より

$$\begin{aligned}\tilde{\boldsymbol{u}}_2 &:= \boldsymbol{v}_2 - (\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{u}_1)\boldsymbol{u}_1 \\ &= \begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix} - \frac{1}{5}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{5}\begin{pmatrix}-8\\6\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

**Step 3.** $\|\tilde{\boldsymbol{u}}_2\| = \frac{1}{5}\sqrt{(-8)^2+6^2} = 2$ より

$$\boldsymbol{u}_2 := \frac{1}{\|\tilde{\boldsymbol{u}}_2\|}\tilde{\boldsymbol{u}}_2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-8\\6\end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix}.$$

以上より

$$\left\{\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}, \frac{1}{5}\begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix}\right\}.$$

(2)

$$\boldsymbol{v}_1 := \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 := \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_3 := \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$$

とおく.

**Step 1.** $\|\boldsymbol{v}_1\| = \sqrt{1^2+(-1)^2+0^2} = \sqrt{2}$ より

$$\boldsymbol{u}_1 := \frac{1}{\|\boldsymbol{v}_1\|}\boldsymbol{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}.$$

**Step 2.** $(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{u}_1) = (1/\sqrt{2})\{1\cdot 1 + 0\cdot(-1) + (-1)\cdot 0\} = 1/\sqrt{2}$ より

$$\begin{aligned}\tilde{\boldsymbol{u}}_2 &:= \boldsymbol{v}_2 - (\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{u}_1)\boldsymbol{u}_1 \\ &= \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}2-1\\0+1\\-2-0\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

**Step 3.** $\|\tilde{\boldsymbol{u}}_2\| = \frac{1}{2}\sqrt{1^2+1^2+(-2)^2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$ より

$$\boldsymbol{u}_2 := \frac{1}{\|\tilde{\boldsymbol{u}}_2\|}\tilde{\boldsymbol{u}}_2 = \frac{1}{\frac{\sqrt{6}}{2}}\cdot\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}.$$

**Step 4.**

$$(\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{u}_1) = \frac{1}{\sqrt{2}}\{1\cdot 1 + 2\cdot(-1) + 3\cdot 0\} = \frac{-1}{\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{2},$$

$$(\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{u}_2) = \frac{1}{\sqrt{6}}\{1\cdot 1 + 2\cdot 1 + 3\cdot(-2)\} = \frac{-3}{\sqrt{6}} = \frac{-\sqrt{6}}{2}$$

より

$$\begin{aligned}\tilde{\boldsymbol{u}}_3 &:= \boldsymbol{v}_3 - (\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{u}_1)\boldsymbol{u}_1 - (\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{u}_2)\boldsymbol{u}_2 \\ &= \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} - \frac{-\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} - \frac{-\sqrt{6}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}2+1+1\\4-1+1\\6+0-2\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}4\\4\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

**Step 5.** $\|\tilde{\boldsymbol{u}}_3\| = \sqrt{2^2+2^2+2^2} = 2\sqrt{3}$ より

$$\boldsymbol{u}_2 := \frac{1}{\|\tilde{\boldsymbol{u}}_2\|}\tilde{\boldsymbol{u}}_2 = \frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

以上より

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

$\boxed{7}$ $V$ を内積空間とし $(\cdot,\cdot)$ をその内積とする. $\boldsymbol{u}\in V$ に対して

$$\|\boldsymbol{u}\| := \sqrt{(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u})}$$

とおくと, $\|\cdot\|$ は $V$ のノルムになることを証明せよ. ただし, 補助定理

$$|(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})| \leq \sqrt{(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u})}\sqrt{(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})} \quad ({}^{\forall}\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in V)$$

を用いてもよい.

**解答例**　ノルムの定義を満たすことを示す.
$\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\in V$, $c\in\mathbb{R}$ とする.
(i) 内積の条件 $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u})\geq 0$ を用いると

$$\|\boldsymbol{u}\| = \sqrt{(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u})} \geq 0.$$

特に, $\|\boldsymbol{u}\|=0$ ならば, $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u})=0$ となり, 内積の条件から $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0}$. 逆に, $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0}$ のとき, 内積の条件から $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u})=0$ となり,

$$\|\boldsymbol{u}\| = \sqrt{(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u})} = 0$$

(よってノルムの第 1 条件を満たす. )

(ii) 内積の条件

$$(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{v},\boldsymbol{u}),$$

$$(c\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = c(\boldsymbol{v},\boldsymbol{u}),$$

より

$$\begin{aligned}\|c\boldsymbol{u}\| &= \sqrt{(c\boldsymbol{u},c\boldsymbol{u})}\\ &= \sqrt{c(\boldsymbol{u},c\boldsymbol{u})}\\ &= \sqrt{c(c\boldsymbol{u},\boldsymbol{u})}\\ &= \sqrt{c^2(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u})}\\ &= \sqrt{c^2}\sqrt{(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u})}\\ &= |c|\sqrt{(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u})}\\ &= |c|\|\boldsymbol{u}\|.\end{aligned}$$

(よってノルムの第 2 条件を満たす. )

(iii) 内積の条件

$$(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{v},\boldsymbol{u}),$$

$$(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{u},\boldsymbol{w}) + (\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}),$$

と補助定理 (シュワルツの不等式) より

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\|^2 &= (\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v},\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})\\ &= (\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) + (\boldsymbol{v},\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})\\ &= (\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v},\boldsymbol{u}) + (\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})\\ &= (\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}) + (\boldsymbol{v},\boldsymbol{u}) + (\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) + (\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})\\ &= \|\boldsymbol{u}\|^2 + 2(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) + \|\boldsymbol{v}\|^2\\ &\leq \|\boldsymbol{u}\|^2 + 2|(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})| + \|\boldsymbol{v}\|^2\\ &\leq \|\boldsymbol{u}\|^2 + 2\sqrt{(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u})}\sqrt{(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})} + \|\boldsymbol{v}\|^2\\ &\leq \|\boldsymbol{u}\|^2 + 2\|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\| + \|\boldsymbol{v}\|^2\\ &= (\|\boldsymbol{u}\| + \|\boldsymbol{v}\|)^2.\end{aligned}$$

つまり

$$\|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\| \leq \|\boldsymbol{u}\| + \|\boldsymbol{v}\|.$$

(よってノルムの第 3 条件を満たす.)

以上より $\|\cdot\|$ は $V$ のノルムである. □

(必要に応じて裏面を使用してもよい)