令和5年度 線形代数及び演習II 小テスト対策プリント

＿＿＿＿ 課程 ＿＿＿＿ 年生　学籍番号 ＿＿＿＿ 名前 ＿＿＿＿

$\boxed{1}$ $V := \mathbb{R}^2$ とする．$\boldsymbol{u} \in V$ に対して

$$\|\boldsymbol{u}\| := \sqrt{u_1^2 + u_2^2} \quad \text{ただし，} \boldsymbol{u} = {}^{\top}(u_1, u_2)$$

と定義すると，$\|\cdot\|$ は V のノルムになることを証明せよ．

$\boxed{2}$ $V := \mathbb{R}^{n\times n}$, つまり n 次正方行列とする．$A, B \in V$ に対して，

$$(A, B) := \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} b_{ij}$$

と定義すると $(\cdot, \cdot)$ は V の内積になることを証明せよ．

$\boxed{3}$ $V := \mathbb{R}^3$ の内積を

$$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) := \sum_{k=1}^{3} u_k v_k$$

で定義する．ただし，$\boldsymbol{u} :={}^\mathsf{T}(u_1, u_2, u_3)$，$\boldsymbol{v} :={}^\mathsf{T}(v_1, v_2, v_3)$．次の元が直交するように実数 a を定めよ．

$$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} a \\ a \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} a \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{4}$ $V := \mathbb{R}[x]_2$ の内積を

$$(f, g) := \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$$

で定義する．次の元が直交するように実数 a を定めよ．

$$f(x) = x^2 + 1, \quad g(x) := 5x^2 + a.$$

$\boxed{5}$ $V := C([0, 2\pi])$ の内積を

$$(f, g) := \int_{0}^{2\pi} f(x)g(x)dx$$

で定義する．$\cos 2x \perp \cos x$ を示せ[1]．

(必要に応じて裏面を使用してもよい)

[1]
$$\cos 2x \cos x = \frac{1}{2}(\cos 3x + \cos x)$$
を用いるとよい．

令和５年度 線形代数及び演習 II 小テスト対策プリント

__________ 課程 __________ 年生　学籍番号 __________ 名前 ____________________

$\boxed{6}$ 次の基底からシュミットの直交化によって正規直交基底を選び直せ.

(1)

$$\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

(2)

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

$\boxed{7}$ V を内積空間とし $(\cdot,\cdot)$ をその内積とする. $\boldsymbol{u} \in V$ に対して

$$\|\boldsymbol{u}\| := \sqrt{(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u})}$$

とおくと, $\|\cdot\|$ は V のノルムになることを証明せよ. ただし, 補助定理

$$|(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})| \leq \sqrt{(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u})}\sqrt{(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})} \quad ({}^{\forall}\boldsymbol{u},\boldsymbol{v} \in V)$$

を用いてもよい.

(必要に応じて裏面を使用してもよい)